DIKTAT

PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA

MATERI DASAR

DISUSUN OLEH :

EDDY HERMANTO, ST

SMA Negeri 5 Bengkulu
Jalan Cendana Nomor 20
Bengkulu

SINGKATAN

AHSME	:	American High School Math Exam
AIME	:	American Invitational Mathematics Examination
APMO	:	Asian Pasific Mathematical Olympiad
ARML	:	American Regions Mathematics League
Alabama MC	:	Alabama State-Wide Mathematics Contest
COMC	:	Canadian Open Mathematics Challenge
Hongkong PSC	:	Hongkong Preliminary Selection Contest
India RMO	:	India Regional Mathematical Olympiad
MATNC	:	Mu Alpha Theta National Convention
ME VXNY	:	Mathematical Excalibur Volume X Nomor Y
NHAC	:	Niels Henrik Abel Contest
OMITS	:	Olimpiade Matematika ITS
OSK	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Kabupaten/Kota
OSK SMP/MTs	:	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Kabupaten/Kota
OSN	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Nasional
OSN SMP/MTs	:	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Nasional
OSP	:	Olimpiade Sains Indonesia SMA/MA Tingkat Provinsi
OSP SMP/MTs	:	Olimpiade Sains Indonesia SMP/MTs Tingkat Provinsi
South Carolina MC	:	South Carolina Mathematics Contest
QAMT	:	Queensland Association of Mathematics Teacher
USAMTS	:	USA Mathematical Talent Search

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Penulis ucapkan kepada Allah, SWT karena dengan karunia-Nya Penulis dapat menyelesaikan penulisan diktat ini. Diktat ini Penulis tulis dalam rangka mempermudah tugas dalam mempersiapkan siswa-siswa SMA menghadapi olimpiade matematika pada tahap-tahap awal.

Menurut pengamatan Penulis, masih ada jurang pemisah yang cukup jauh antara siswa-siswa dari pulau Jawa dengan dari luar pulau Jawa. Masih sangat banyak siswa-siswa di luar pulau Jawa yang belum memahami persoalan-persoalan dasar di bidang Olimpiade Matematika sehingga mengalami kesulitan besar ketika akan menghadapi OSN. Buku ini berusaha menjawab tentang persoalan-persoalan mendasar di bidang Olimpiade Matematika tersebut.

Penulis menyarankan sebelum menyampaikan isi materi buku ini, Pembina Olimpiade di sekolah dapat menyampaikan materi pendahuluan tentang pembuktian langsung maupun tidak langsung serta Strategi Penyelesaian Masalah (Problem Solving Strategies) yang dapat dipelajari dari beberapa buku yang ada seperti *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika* karya Wono Setya Budhi, *Problem-Solving Strategies* karya Arthur Engel maupun *Problem-Solving Through Problems* karya Loren C. Larson.

Penulis juga mengharapkan Para guru pembina olimpiade dalam membina siswa-siswa juga memberikan soal-soal pada tingkatan OSN pada kegiatan umpan balik yang dapat dilaksanakan setelah guru menyelesaikan pembinaan pada setiap babnya ataupun setelah menyelesaikan seluruh bab pada buku ini.

Ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian diktat ini, khususnya kepada isteri tercinta Penulis, Rosya Hastaryta, S. Si, yang telah memberi dukungan yang besar kepada Penulis serta juga telah melahirkan puteri pertama kami, Kayyisah Hajidah, pada tanggal 2 Desember 2009.

Penulis merasa bahwa diktat ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu Penulis mengharapkan saran dan kritik dari Pembaca yang budiman sebagai bahan perbaikan diktat ini.

Akhir kata semoga buku ini dapat bermanfaat yang sebesar-besarnya bagi Pembaca sekalian.

Bengkulu,   September 2011

EDDY HERMANTO, ST
Email : eddyhbkl@yahoo.com
http://baktiolimpiade.wordpress.com

DAFTAR ISI

Ebook ini gratis dan dapat di*print* maupun dikopi serta dapat disebarkan melalui *softcopy* atau *hardcopy*, namun dengan syarat :

1. tidak untuk dikomersilkan.
2. tidak mengubah sebagian baik sedikit maupun banyak dari isi buku sehingga hak cipta maupun identitas Penulis seolah-olah hilang.
3. tidak menghilangkan halaman ini.

BAB I
ALJABAR

1. PEMFAKTORAN DAN PENGURAIAN

Beberapa bentuk pemfaktoran maupun penguraian yang harus diketahui adalah :

(i) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
(iii) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
(iv) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$
(v) $(x + y)(x - y)^2 = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$
(vi) $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan asli
(vii) $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan ganjil
(viii) $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1$
(ix) $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$
(x) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
(xi) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
(xii) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
(xiii) $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
(xiv) $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
(xv) $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^3$
(xvi) $(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^3$

Penguraian bentuk $(x + y)^n$ untuk $n > 4$ dapat menggunakan binomial Newton yang akan diterangkan dalam bagian lain.

Berdasarkan bentuk (vi) dan (vii) didapat fakta bahwa $(a - b)$ membagi $(a^n - b^n)$ untuk n asli dan $(a + b)$ membagi $(a^n + b^n)$ untuk n ganjil yang terkadang digunakan untuk menyelesaikan soal pada teori bilangan.

Contoh 1 :

(OSK 2004 SMP/MTs) Nilai dari $\sqrt{5050^2 - 4950^2} = \cdots\cdots$

Solusi :

Perhatikan bahwa $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ maka

$$\sqrt{5050^2 - 4950^2} = \sqrt{(5050 + 4950)(5050 - 4950)}$$
$$\sqrt{5050^2 - 4950^2} = \sqrt{(10000)(100)} = \sqrt{1000000}$$
$$\sqrt{5050^2 - 4950^2} = 1.000$$

Contoh 2 :

(OSK 2005 SMP/MTs) Salah satu faktor dari $17^3 - 5^3$ adalah ....

A. 5 B. 17 C. 13 D. 273 E. 399

Solusi :

Perhatikan bahwa $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ maka

$17^3 - 5^3 = (17 - 5)(17^2 + 17 \cdot 5 + 5^2)$

$17^3 - 5^3 = 12 \cdot 399$ (Jawaban : E)

Contoh 3 :
(OSK 2011 Tipe 1) Jika $A = 5^x + 5^{-x}$ dan $B = 5^x - 5^{-x}$ maka $A^2 - B^2$ adalah ⋯⋯

Solusi :
$A = 5^x + 5^{-x}$ dan $B = 5^x - 5^{-x}$
$A + B = (5^x + 5^{-x}) + (5^x - 5^{-x}) = 2 \cdot 5^x$
$A - B = (5^x + 5^{-x}) - (5^x - 5^{-x}) = 2 \cdot 5^{-x}$
$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = 2 \cdot 5^x \cdot 2 \cdot 5^{-x} = 4$
Jadi, $A^2 - B^2 = 4$.

Contoh 4 :
Rasionalkan penyebut dari $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

Solusi :
Kuadrat dari suatu bentuk akar menghasilkan bilangan tersebut.
Mengingat bahwa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ maka jika penyebut tersebut dikalikan dengan lawannya akan didapat bentuk penyebut yang rasional.

$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{2}{5}\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$

Akhirnya didapat penyebut yang merupakan bilangan rasional, yaitu 5. Contoh di atas adalah contoh dengan penyebutnya merupakan penjumlahan dua bilangan. Jika penyebutnya merupakan penjumlahan lebih dari dua bilangan, maka perkalian dengan lawanya dilakukan lebih dari satu kali.

Contoh 5 :
Rasionalkan penyebut dari $\frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Solusi :
$\frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}{\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}$

$((2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5})\ ((2 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}) = (2 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2 + 4\sqrt{3}$

$\frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+4\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}+4+2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{22}$

Jadi, $\frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}+4+2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{22}$

Contoh 6 :
(OSP 2010 SMP/MTs) Jika $p = \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}}$ dan $q = \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}}$, maka nilai dari $p^2 + pq + q^2$ adalah ⋯⋯⋯

Solusi :
$pq = \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}} = \frac{1}{14-13} = 1$

$p + q = \frac{1}{\sqrt{14}-\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{13}+\sqrt{14}-\sqrt{13}}{14-13} = 2\sqrt{14}$

$(p + q)^2 = 56$
$p^2 + pq + q^2 = (p + q)^2 - pq$
$p^2 + pq + q^2 = 56 - 1 = 55$
Jadi, nilai dari $p^2 + pq + q^2$ adalah 55.

Contoh 7 :
Jika $a^2 + b^2 = 6ab$ maka tentukan nilai dari $\frac{a+b}{a-b}$ untuk $a, b \neq 0$.

Solusi :
Misalkan $x = \frac{a+b}{a-b}$ maka

$x^2 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$

$x^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab}$

Karena $a^2 + b^2 = 6ab$ maka $x^2 = \frac{8ab}{4ab} = 2$

Jadi, $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$

Contoh 8 :
Hitunglah $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Solusi :
Misalkan $X = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}$

$X^2 = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) - 2\sqrt{2^2 - 3}$

$X^2 = 4 - 2$

$X^2 = 2$

Maka $\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

Contoh 9 :
(AIME 1989) Nilai dari $\sqrt{1+28\cdot 29\cdot 30\cdot 31}$ adalah ⋯⋯

Solusi :
Mengingat bahwa $1 + (n - 1)(n)(n + 1)(n + 2) = (n(n + 1) - 1)^2$ maka

$\sqrt{1+28\cdot 29\cdot 30\cdot 31} = 29 \cdot 30 - 1$

$\sqrt{1+28\cdot 29\cdot 30\cdot 31} = 869$.

Contoh 10 :
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt{2x+3} - \sqrt{7-x} = 1$

Solusi :
$\sqrt{2x+3} - \sqrt{7-x} = 1$

Karena bilangan dalam akar harus tak negatif maka penyelesaian persamaan tersebut harus memenuhi syarat $-\frac{3}{2} \leq x \leq 7$

$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{7-x}$

$2x + 3 = 1 + 7 - x + 2\sqrt{7-x}$

$3x - 5 = 2\sqrt{7-x}$

Kuadratkan kedua ruas dengan syarat $3x - 5 \geq 0$ sebab $\sqrt{7-x} \geq 0$
$9x^2 - 30x + 25 = 4(7 - x)$
$9x^2 - 26x - 3 = 0$
$(9x + 1)(x - 3) = 0$
$x = 3$ atau $x = -\frac{1}{9}$ (tidak memenuhi syarat $x \geq \frac{5}{3}$)
Untuk $x = 3$ maka $\sqrt{2x+3} - \sqrt{7-x} = 3 - 2 = 1$.
Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = 3$.

Contoh 11 :
Jika $a^2 = 7b + 1945$ dan $b^2 = 7a + 1945$ dengan a dan b adalah bilangan real berbeda, maka nilai dari ab adalah .....

Solusi :
$a^2 = 7b + 1945$ dan $b^2 = 7a + 1945$
$a^2 - b^2 = 7(b - a)$
Karena $a \neq b$ maka $a + b = -7$
$a^2 + b^2 = 7(b + a) + 3890$
$(a + b)^2 - 2ab = 7(a + b) + 3890$
$49 - 2ab = -49 + 3890$
$ab = -1896$

Contoh 12 :
a, b, c dan d adalah bilangan real tak nol yang memenuhi
$a^2 + b^2 = 1$
$c^2 + d^2 = 1$
$ac + bd = 0$
Buktikan bahwa $ab + cd = 0$.

Solusi :
Karena $ac + bd = 0$ maka
$\frac{a}{b} = -\frac{d}{c}$ .... (1)
Misalkan $\frac{a}{b} = -\frac{d}{c} = k$ maka
$a = bk$ dan $d = -ck$
$a^2 + b^2 = 1$
$b^2(k^2 + 1) = 1$
$k^2 + 1 = \frac{1}{b^2}$ .... (2)
$c^2 + d^2 = 1$
$c^2(k^2 + 1) = 1$
Subtitusikan persamaan (2).
$b^2 = c^2$
$ab + cd = bk \cdot b + c(-ck)$
$ab + cd = b^2k - c^2k$
$ab + cd = (b^2 - c^2)k$
Karena $b^2 = c^2$ maka $ab + cd = (b^2 - c^2)k = 0$
Jadi, terbukti bahwa $ab + cd = 0$.

LATIHAN 1 :

1. Jika $\frac{3a+4b}{2a-2b}$ = 5 maka tentukan nilai dari $\frac{a^2+2b^2}{ab}$
2. Nilai dari $\frac{(1945+2011)^2+(2011-1945)^2}{1945^2+2011^2}$ adalah ········
3. (AIME 1986) Tentukan nilai dari $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)$.
4. Jika $x+y+3\sqrt{x+y}=18$ dan $x-y-2\sqrt{x-y}=15$, maka x·y = ·····
5. Tentukan nilai X yang memenuhi $X=\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)+\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$
6. Jika diketahui bahwa $\sqrt{14y^2-20y+48}$ + $\sqrt{14y^2-20y-15}$ = 9, maka tentukan nilai dari $\sqrt{14y^2-20y+48}$ – $\sqrt{14y^2-20y-15}$.
7. (OSP 2006) Himpunan semua x yang memenuhi $(x-1)^3+(x-2)^2=1$ adalah ·····
8. (Canadian MO 1992) Selesaikan persamaan $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$.
9. (OSP 2007) Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
10. (AIME 1983) w dan z adalah bilangan kompleks yang memenuhi $w^2+z^2=7$ dan $w^3+z^3=10$. Apakah nilai terbesar yang mungkin dari w + z ?
11. (Baltic Way 1999) Tentukan semua bilangan real a, b, c dan d yang memenuhi sistem persamaan berikut :
    abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1
    bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9
    cda + cd + da + ac + c + d + a = 9
    dab + da + ab + bd + d + b + a = 9
12. Jika $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$, maka nilai dari $\left(1+\frac{1}{X}\right)^3$ adalah ······
13. (AIME 2000) Tentukan tepat kedua akar real persamaan $2000x^6+100x^5+10x^3+x-2=0$.
14. (AIME 1987) Tentukan nilai dari $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$.
15. (Baltic Way 1993 Mathematical Team Contest) Tentukan semua bilangan bulat n yang memenuhi $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ adalah bilangan bulat
16. (Canadian MO 1998) Tentukan penyelesaian x real yang memenuhi persamaan :

$$x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

17. (AIME 1990) Bilangan real a, b, x dan y memenuhi $ax + by = 3$, $ax^2 + by^2 = 7$, $ax^3 + by^3 = 16$ dan $ax^4 + by^4 = 42$. Tentukan nilai dari $ax^5 + by^5$.

18. (OSN 2003 SMP/MTs) Diketahui $a + b + c = 0$. Tunjukkan bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

19. (OSN 2009 SMP/MTs) Setiap sisi suatu kubus dituliskan sebuah bilangan asli. Setiap titik sudutnya diberi nilai yang merupakan hasil kali dari tiga bilangan pada tiga sisi yang berpotongan di titik sudut tersebut. Jika jumlah semua bilangan pada titik-titik sudut tersebut sama dengan 1001, tentukan jumlah semua bilangan yang dituliskan pada sisi-sisi kubus tersebut.

2. BARISAN DAN DERET

1, 2, 3, 4, 5, ··· dikatakan sebagai barisan karena mempunyai suatu pola tertentu dengan rumus suku ke-n adalah n.

1 + 2 + 3 + 4 + ···· disebut sebagai deret.

Ada beberapa barisan dan deret yang akan dibahas.

A. Barisan dan Deret Aritmatika

1. Pengertian, rumus suku ke-n dan rumus Jumlah n suku pertama

Barisan aritmatika adalah barisan yang setiap dua suku berurutan memiliki selisih yang konstan.

a, a + b, a + 2b, a + 3b ··· adalah barisan aritmatika dengan suku pertama = a dan beda = b.

Suku ke-n, U_n, dirumuskan dengan :

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Jumlah n bilangan pertama, S_n, dirumuskan dengan

$$S_n = \tfrac{n}{2}(2a + (n - 1)b) = \tfrac{n}{2}(a + U_n)$$

Bukti :

$S_n = (a) + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b)$

$S_n = (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 3)b) + \cdots + (a)$

Jumlahkan kedua persamaan di atas didapat

$2\,S_n = n \cdot (2a + (n - 1)b)$

$S_n = \tfrac{n}{2}(2a + (n - 1)b) = \tfrac{n}{2}(a + U_n)$ (terbukti)

Contoh 13 :

Diketahui barisan 2, 5, 8, 11, ···. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 4 suku pertama.

Solusi :

2, 5, 8, 11, ··· adalah barisan aritmatika dengan suku pertama 2 dan beda 3.

Suku ke-10, $U_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 3 = 29$

Jumlah 4 suku pertama = $\tfrac{4}{2} \cdot (2 \cdot 2 + (4 - 1) \cdot 3) = 26$

Contoh 14 :

Sebuah barisan jumlah n buah suku pertama dirumuskan dengan $S_n = 3n^2 - 15n$, maka U_3 = ····

Solusi :

Perhatikan bahwa jika kita mengurangkan jumlah n suku pertama, S_n dengan jumlah n – 1 suku pertama, S_{n-1}, maka akan didapatkan suku ke-n, U_n.

Jadi, $U_n = S_n - S_{n-1}$.

$U_n = (3n^2 - 15n) - (3(n - 1)^2 - 15(n - 1))$

$U_n = 3n^2 - 15n - 3n^2 + 6n - 3 + 15n - 15$

$U_n = 6n - 18$

Maka $U_3 = 6(3) - 18 = 0$

Cara lain adalah dengan langsung menghitung $U_3 = S_3 - S_2$.

$S_3 = 3(3)^2 - 15(3) = 27 - 45 = -18$

$S_2 = 3(2)^2 - 15(2) = 12 - 30 = -18$

$U_3 = S_3 - S_2$

$U_3 = -18 - (-18)$

$U_3 = 0$

Contoh 15 :

Nilai dari $\sum_{k=1}^{n}(2k+3) = \cdots\cdots$

Solusi :

Jika nilai k dari 1 sampai n dijalankan didapat

$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$ = 5 + 7 + 9 + ··· + (2n + 3) merupakan deret aritmatika dengan a = 5 serta b = 2.

$S_n = \frac{n}{2}\left(2(5)+(n-1)2\right)$

Jadi, $\sum_{k=1}^{n}(2k+3) = n^2 + 4n$

Contoh 16 :

(OSK 2006) Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke ······

Solusi :

$u_{25} = 3(u_5)$, maka a + 24b = 3(a + 4b) sehingga a = 6b

$u_n = a + (n - 1)b = 2u_1 = 2a$

6b + (n − 1)b = 2(6b)

n = 7

Suku tersebut adalah suku ke-7

Contoh 17 :

Sisi-sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmatika. Jika sisi hipotenusa sama dengan 20, maka keliling segitiga tersebut adalah ····

Solusi :

Karena sisi terpanjang segitiga sama dengan 20 dan membentuk barisan aritmatika maka sisi-sisi segitiga tersebut dapat dimisalkan dengan 20, 20 − x dan 20 − 2x dengan x adalah bilangan positif.

Karena ketiga sisi membentuk segitiga siku-siku maka

$(20 - 2x)^2 + (20 - x)^2 = 20^2$

$400 - 80x + 4x^2 + 400 - 40x + x^2 = 400$

$5x^2 - 120x + 400 = 0$

$(x - 4)(x - 20) = 0$

x = 4 atau x = 20

Jika x = 20 maka sisi-sisi segitiga tersebut adalah 20, 0 dan −20 yang tidak mungkin merupakan sisi-sisi segitiga.

Jika x = 4 maka sisi-sisi segitiga tersebut adalah 20, 16 dan 12 yang membentuk sisi-sisi segitiga siku-siku.

Jadi, keliling segitiga tersebut = 20 + 16 + 12 = 48.

2. Suku Tengah

Misalkan U_t menyatakan suku tengah dari suatu barisan aritmatika maka :

$$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2}$$

dengan n merupakan bilangan ganjil

Contoh 18 :
Diketahui 3, ⋯, 13, 15, ⋯ adalah barisan aritmatika. Tentukan suku tengah barisan tersebut.

Solusi :
3, ⋯, 13, 15 adalah barisan aritmatika. Maka $U_1 = a = 3$ dan $U_n = 15$.
Maka suku tengah, $U_t = \frac{1}{2}(3 + 15) = 9$

3. Sisipan
Misalkan setiap dua bilangan berurutan pada barisan aritmatika disisipi k buah bilangan namun tetap membentuk barisan aritmatika. Maka beda barisan tersebut akan memiliki perubahan dengan suku pertama tetap.
Misalkan b_B = beda barisan yang baru dan b_L = beda barisan yang lama. Hubungan keduanya adalah

$$b_B = \frac{b_L}{k+1}$$

Contoh 19 :
Pada setiap dua bilangan berurutan dari barisan 2, 12, 22, 32, 42. ···· disisipi sebanyak 4 bilangan. Tentukan suku ke-100 dari barisan yang baru.

Solusi :
Beda barisan yang baru adalah $b_B = \frac{b_L}{k+1} = \frac{10}{4+1} = 2$
Suku pertama, a = 2.
$U_{100} = a + 99b_B = 2 + 99 \cdot 2 = 200$
Suku ke-100 = 200.
Jadi, suku ke-100 barisan tersebut adalah 200.

4. Barisan Aritmatika Bertingkat
Misalkan ada barisan u_1, u_2, u_3, ⋯, u_n yang bukan merupakan barisan aitmatika sebab $u_n - u_{n-1}$ tidak konstan. Tetapi apabila diambil $D_1(n) = u_n - u_{n-1}$ lalu $D_2(n) = D_1(n) - D_1(n - 1)$ dan seterusnya sampai pada suatu saat $D_k(n) - D_k(n - 1)$ bernilai konstan. Maka kita dapat mengambil kesimpulan bahwa rumus jumlah n suku pertama, S_n, barisan tersebut merupakan polinomial pangkat k.

Contoh 20 :
Diketahui barisan 1, 3, 6, 10, 15, 21, ⋯. Tentukan rumus jumlah n suku pertama, S_n.

Solusi :
Kalau diperhatikan, barisan 1, 3, 6, 10, 15, 21, ⋯ bukanlah barisan aritmatika. Tetapi rumus suku ke-n barisan tersebut ternyata merupakan rumus jumlah n suku pertama dari barisan 1, 2, 3, ⋯, n yang merupakan barisan aritmatika.
Maka kita dapat menyelesaikan soal tersebut dengan menganggapnya merupakan barisan aritmatika bertingkat.

n	S(n)	$D_1(n) = S(n) - S(n-1)$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	1			
2	4	3		
3	10	6	3	
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Karena $D_3(n)$ konstan maka dapat diambil kesimpulan bahwa rumus S_n merupakan polinomial pangkat 3.
Misalkan $S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$.

n	S(n)	$D_1(n) = S(n) - S(n-1)$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	a+b+c+d			
2	8a+4b+2c+d	7a+3b+c		
3	27a+9b+3c+d	19a+5b+c	12a+2b	
4	64a+16b+4c+d	37a+7b+c	18a+2b	6a
5	125a+25b+5c+d	61a+9b+c	24a+2b	6a

Dari kedua tabel didapat bahwa :
$6a = 1$ .... (1)
$12a + 2b = 3$ .... (2)
$7a + 3b + c = 3$ .... (3)
$a + b + c + d = 1$ .... (4)
Dari pers (1) didapat $a = \frac{1}{6}$
Dari pers (2) didapat $b = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$
Dari pers (3) didapat $c = 3 - 7\left(\frac{1}{6}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18-7-9}{6} = \frac{1}{3}$
Dari pers (4) didapat $d = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6-1-3-2}{6} = 0$
Maka rumus jumlah n suku pertama, $S(n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

B. Barisan dan Deret Geometri

1. Pengertian, rumus suku ke-n dan rumus Jumlah n suku pertama
Barisan geometri adalah barisan yang setiap dua suku berurutan memiliki perbandingan yang konstan. Misalkan a, ar, ar^2, ··· adalah barisan geometri dengan suku pertama = a dan rasio = r maka :
Suku ke-n, U_n, dirumuskan dengan :

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Jumlah n bilangan pertama, S_n, dirumuskan dengan

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Contoh 21 :
Diketahui barisan 2, 6, 18, 54, ··· . Tentukan suku ke-5 dan jumlah 4 suku pertama barisan tersebut.

Solusi :
2, 6, 18, 54, ··· adalah contoh barisan geometri dengan suku pertama 2 dan rasio 3.
Suku ke-5, $U_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 162$
Jumlah 4 suku pertama = $\frac{2\cdot(3^4-1)}{3-1} = 80$

Contoh 22 :
Pada barisan geometri diketahui $U_8 = 36$ dan $S_7 = 52$, maka $S_8 = \cdots\cdot$

Solusi :
$U_8 = 36$ dan $S_7 = 52$

Pada barisan aritmatika maupun geometri berlaku $S_n - S_{n-1} = U_n$.
$S_8 - S_7 = U_8$
$S_8 = 52 + 36 = 88$.

Contoh 23 :
Tiga bilangan membentuk deret geometri dengan jumlah 65. Jika suku ke-3 dikurangi 20 terbentuklah deret aritmatika, maka rasio barisan tersebut adalah ····

Solusi :
Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah a, ar dan ar^2. Maka
a, ar dan $ar^2 - 20$ membentuk barisan aritmatika sehingga
$2ar = a + ar^2 - 20$
$2ar + 20 = a + ar^2$ ················· (1)
$a + ar + ar^2 = 65$ ·················· (2)
$2ar + 20 + ar = 65$
$ar = 15$ ····················· (3)
Subtitusikan persamaan (3) ke (1) didapat
$50 = a + 15r$ ·················· (4)
Subtitusikan persamaan (4) ke (3).
$(50 - 15r)r = 15$
$10r - 3r^2 = 3$
$(3r - 1)(r - 3) = 0$
$r = \frac{1}{3}$ atau $r = 3$
Jika $r = \frac{1}{3}$ maka ketiga bilangan tersebut adalah 45, 15 dan 5 yang membentuk barisan geometri dan 45, 15, –15 yang membentuk barisan aritmatika.
Jika r = 3 maka ketiga bilangan tersebut adalah 5, 15 dan 45 yang membentuk barisan geometri dan 5, 15, 25 yang membentuk barisan aritmatika.
Jadi, rasio barisan tersebut adalah $\frac{1}{3}$ atau 3.

2. Suku Tengah
Misalkan U_t menyatakan suku tengah dari suatu barisan geometri maka :

$$U_t^2 = U_1 \cdot U_n$$

dengan n merupakan bilangan ganjil

Contoh 24 :
Diketahui 2, 6, 18, 54, 162, ···· adalah barisan geometri. Tentukan suku tengah dari barisan tersebut.

Solusi :
2, 6, 18, 54, 162 adalah barisan geometri. Maka $U_1 = a = 2$ dan $U_n = 162$.
Maka suku tengah, $U_t = \sqrt{2 \cdot 162} = 18$

3. Sisipan
Misalkan setiap dua bilangan berurutan pada barisan geometri disisipi k buah bilangan namun tetap membentuk barisan geometri. Maka rasio barisan tersebut akan memiliki perubahan dengan suku pertama tetap.
Misalkan r_B = rasio barisan yang baru dan r_L = rasio barisan yang lama. Hubungan keduanya adalah

$$r_B = \sqrt[k+1]{r_L}$$

Contoh 25 :
Pada setiap dua bilangan berurutan dari barisan 2, 32, 512, 8192, ···· disisipi sebanyak 3 bilangan. Tentukan suku ke-7 dari barisan yang baru.

Solusi :
Rasio yang baru, $r_B = \sqrt[k+1]{r_L} = \sqrt[4]{16} = 2$.
Suku pertama, a = 2.
$U_7 = ar^6 = (2)(2^6) = 128$
Suku ke-7 = 128.

4. Barisan geometri tak hingga

Dari persamaan $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ jika n → ∞ maka $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ dengan syarat $-1 < r < 1$.
Rumus tersebut merupakan rumus jumlah dari suatu barisan tak hingga dengan suatu syarat tertentu.

Contoh 26 :
Tentukan nilai dari $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Solusi :
Persoalan di atas termasuk barisan geometri tak hingga dengan a = 2 dan r = ½
$2 + 1 + ½ + ¼ + \cdots = S_\infty = \frac{a}{1-r}$.
$2 + 1 + ½ + ¼ + \cdots = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4$.
Maka nilai dari $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 4$.

Contoh 27 :
Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah 6 dan jumlah dari suku-suku yang bernomor ganjil adalah 4. Suku ke-6 barisan tersebut adalah ····

Solusi :
Misalkan suku pertama barisan geometri tak hingga tersebut adalah a dan rasio r.
$a + ar + ar^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} = 6$ .... (1)
Suku-suku yang ganjil adalah a, ar^2, ar^4, ··· yang membentuk barisan tak hingga dengan suku pertama a dan rasio r^2.
$a + ar^2 + ar^4 + ar^6 + \cdots = \frac{a}{1-r^2} = 4$ .... (2)
Subtitusikan persamaan (1) ke $\left(\frac{a}{1-r}\right)\left(\frac{1}{1+r}\right) = 4$ sehingga
$\frac{1}{1+r} = \frac{2}{3}$
$3 = 2 + 2r$
$r = \frac{1}{2}$
Subtitusikan persamaan di atas ke persamaan (1) didapat
a = 3
Maka suku ke-6 = $U_6 = ar^5 = \frac{3}{32}$.

C. Barisan dan Deret Lainnya serta Bentuk Tak Hingga

Suatu barisan tidak harus masuk ke dalam salah satu dari dua bentuk di atas. Sebagai contoh adalah barisan yang berbentuk 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ··· yang merupakan penjumlahan dari dua bilangan

sebelumnya. Untuk menyelesaikan persoalan yang ditanyakan memerlukan pengetahuan terhadap pola dari barisan tersebut.

Beberapa contoh rumus deret lainnya :

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Berikut ini dibahas bentuk-bentuk tak hingga yang dapat diselesaikan dengan memisalkan dengan suatu variabel.

Contoh 28 :

Hitunglah nilai dari $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}$

Solusi :

Misalkan $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}$ = X.

Kuadratkan kedua ruas. Pada ruas kiri akan didapatkan bentuk tak hingga semula. Maka

$2X = X^2$

$X(X - 2) = 0$

Karena $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}$ tidak mungkin sama dengan 0 maka $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}$ = 2.

Jadi, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}$ = 2

Contoh 29 :

Hitunglah bentuk tak hingga berikut, $2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\vdots}}}$.

Solusi :

Misalkan $2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\vdots}}}$ = X maka

$2 + \frac{3}{X}$ = X

$X^2 - 2X - 3 = 0$

$(X - 3)(X + 1) = 0$

Karena $2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\vdots}}}$ tidak mungkin sama dengan -1 maka $2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\vdots}}}$ = 3.

Jadi, $2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{3}{\vdots}}}$ = 3

D. Prinsip Teleskopik

Prinsip teleskopik banyak digunakan untuk menyederhanakan suatu deret. Ada dua bentuk umum yang dikenal, yaitu penjumlahan dan perkalian sebagai berikut :

a. $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i) = (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1}-a_1$

b. $\prod_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$

Contoh 30 :

$(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})\cdots(1-\frac{1}{2003})(1-\frac{1}{2005})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{6})\cdots(1+\frac{1}{2004})(1+\frac{1}{2006}) = \cdots$

Solusi :

Misal S = $(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})\cdots(1-\frac{1}{2003})(1-\frac{1}{2005})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4})(1+\frac{1}{6})\cdots(1+\frac{1}{2004})(1+\frac{1}{2006})$

S = $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2004}{2005}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2007}{2006}$

S = $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2004}{2005}\cdot\frac{2005}{2004}\cdot\frac{2007}{2006}$

S = $\frac{2007}{2006}$

Contoh 31 :

Tentukan nilai $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{2005\cdot2006}$.

Solusi :

Soal di atas merupakan contoh penerapan prinsip teleskopik.

$\frac{1}{1\cdot2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\cdot4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; .... ; $\frac{1}{2005\cdot2006} = \frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}$

$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{2005\cdot2006} = (\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006})$

$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{2005\cdot2006} = 1 - \frac{1}{2006}$

Jadi, $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{2005\cdot2006} = \frac{2005}{2006}$

Contoh 32 :

(Canadian MO 1997) Buktikan bahwa $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

Solusi :

Misal P = $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}$ dan Q = $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{1998}{1999}$

PQ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{1998}{1999} = \frac{1}{1999}$

Jelas bahwa P < Q

P^2 < PQ sehingga $P^2 < \frac{1}{1999} < \frac{1}{44^2}$. Maka P < $\frac{1}{44}$

P > $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999}$

Maka didapat $\frac{1}{1999}$ < P < $\frac{1}{44}$

$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$ (terbukti)

LATIHAN 2 :

1. Sebuah deret aritmatika terdiri dari n suku (ganjil). Jumlah semua sukunya 260, besar suku tengahnya 20, serta beda deret tersebut adalah 3. Maka U_6 = ····
2. Perhatikan barisan bilangan 500, 465, 430, 395, ···. Suku negatifnya yang pertama adalah ······
3. Diketahui $\sum_{i=1}^{11}(4+2k_i)=77$ dan $\sum_{i=1}^{7}k_i=14$, maka nilai $\sum_{i=8}^{11}(4+2k_i)=\cdots\cdots$
4. Pada suatu deret aritmatika berlaku $u_2 + u_5 + u_6 + u_9 = 40$. Maka S_{10} = ·····
5. (OSK 2009) Jika $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}$ untuk k = 1, 2, ··· dan $x_1 = 1$ maka $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400}$ = ·······
6. (OSP 2006) Hasil penjumlahan semua bilangan bulat di antara $\sqrt[3]{2006}$ dan $\sqrt{2006}$ adalah ··
7. (OSK 2006) Diketahui a + (a + 1) + (a + 2) + ··· + 50 = 1139. Jika a bilangan positif, maka a = ·····
8. (OSK 2011 Tipe 3) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga 2a + 4a + 6a + ... + 200a merupakan kuadrat sempurna adalah ········
9. (AIME 1984) Barisan $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{98}$ memenuhi $a_{n+1} = a_n + 1$ untuk n = 1, 2, 3, ···, 97 dan mempunyai jumlah sama dengan 137. Tentukan nilai dari $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{98}$.
10. Misalkan u_n adalah suku ke-n dari suatu barisan aritmatika. Jika $u_k = t$ dan $u_t = k$ maka tentukan nilai dari suku ke-(k + t).
11. (OSK 2004) Agar bilangan $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$ sedekat mungkin kepada 2004, haruslah n = ·
12. Jika 9 − 7x, 5x − 6 dan x − 1 adalah tiga suku pertama deret geometri tak hingga, maka jumlah suku-sukunya adalah ···
13. Pada suatu deret tak hingga, suku-suku yang bernomor ganjil berjumlah 9/4 sedangkan suku-suku yang bernomor genap berjumlah 3/4 , maka suku pertamanya adalah ·····
14. Batas-batas nilai a supaya deret geometri tak berhingga dengan suku pertama a konvergen dengan jumlah 2 adalah ·····
15. (OSP 2006) Afkar memilih suku-suku barisan geometri takhingga 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ··· untuk membuat barisan geometri takhingga baru yang jumlahnya $\frac{1}{7}$. Tiga suku pertama pilihan Afkar adalah ·····
16. Tentukan jumlah dari $\frac{2}{3}-4+\frac{4}{9}-\frac{4}{7}+\frac{8}{27}-\frac{4}{49}+\cdots\cdots$
17. Tiga buah bilangan merupakan barisan aritmatika. Bila suku tengahnya dikurangi 5, maka terbentuk suatu barisan geometri dengan rasio sama dengan 2. Jumlah barisan aritmatika itu adalah ····· ··
18. Tentukan rumus jumlah n suku pertama dari barisan 4, 10, 20, 35, 56, ···

19. (AIME 1992) Misalkan A adalah barisan a_1, a_2, a_3, ⋯ dengan $a_{19} = a_{92} = 0$ dan ΔA didenisikan dengan barisan $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, ⋯. Jika semua suku-suku barisan Δ(ΔA) sama dengan 1, maka nilai a_1 adalah ⋯⋯

20. (MATNC 2001) Tentukan jumlah 100 bilangan asli pertama yang bukan bilangan kuadrat sempurna.

21. (AIME 2003 Bagian Pertama) Diketahui 0 < a < b < c < d adalah bilangan bulat yang memenuhi a, b, c membentuk barisan aritmatika sedangkan b, c, d membentuk barisan geometri. Jika d − a = 30 maka tentukan nilai dari a + b + c + d.

22. (OSK 2009) Bilangan bulat positif terkecil n dengan n > 2009 sehingga

$$\sqrt{\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n}}$$

merupakan bilangan bulat adalah ⋯⋯⋯

23. (AIME 1985) Barisan bilangan bulat a_1, a_2, a_3, ⋯ memenuhi $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ untuk n > 0. Jumlah 1492 bilangan pertama adalah 1985 dan jumlah 1985 bilangan pertama adalah 1492. Tentukan jumlah 2001 bilangan pertama.

24. Nilai x yang memenuhi persamaan :

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.....}}} = \sqrt{4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + ...}}}$$

adalah ⋯⋯⋯

25. Hitunglah nilai dari

$$6 - \cfrac{5}{3 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{4}{\vdots}}}}$$

26. (OSK 2006/AIME 1990) Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ⋯ terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan tersebut adalah ⋯⋯

27. (AHSME 1996) Barisan 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, ⋯ memiliki blok angka 1 yang berisi n buah angka 2 pada blok ke-n. Tentukan jumlah 1234 bilangan pertama.

28. Misalkan f adalah adalah fungsi yang memenuhi f(n) = f(n − 1) + $\frac{n}{2007}$ untuk setiap n bilangan asli. Jika f(0) = 1945 maka tentukan f(2007).

29. (NHAC 1997-1998 Second Round) Tentukan nilai dari $\frac{1}{1x2x3} + \frac{1}{2x3x4} + \cdots + \frac{1}{1996x1997x1998}$.

30. (OSK 2003) Berapakah hasil perkalian

$$\left(1 - \tfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{1}{2002^2}\right)\left(1 - \tfrac{1}{2003^2}\right)$$

31. Tentukan jumlah dari :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

32. Hitunglah nilai $\sum_{k=1}^{2012}\frac{k^2+3k+1}{(k+1)(k+2)}$.

33. (AIME 2002) Barisan x_1, x_2, x_3, ⋯ memenuhi $x_k = \frac{1}{k^2+k}$. Jika terdapat bilangan berurutan sehingga $x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n = \frac{1}{29}$, maka tentukan semua pasangan (m, n) yang memenuhi.

34. (AIME 2001) Barisan a_1, a_2, a_3, a_4, ⋯ memenuhi a_1 = 211, a_2 = 375, a_3 = 420 dan a_4 = 523 serta $a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$. tentukan nilai dari $a_{531} + a_{753} + a_{975}$.

35. (AIME 1998) Barisan 1000, n, 1000 − n, n − (1000 − n), (1000 − n) − (n − (1000 − n), ⋯ dengan n bilangan bulat berakhir ketika bilangan negatif pertama muncul. Sebagai contoh untuk n = 100 maka barisan tersebut adalah 1000, 100, 900, −800. Suku ke-4 barisan tersebut negatif. Jadi, untuk n = 100 maka barisan tersebut memiliki panjang 3. Tentukan n sehingga panjang barisan tersebut maksimal.

36. (OSN 2008 SMP/MTs) Suatu barisan bilangan real mempunyai suku-suku didefinisikan sebagai berikut.
$u_n = ar^{n-1}$ jika n = 4m − 3 atau n = 4m − 2
$u_n = -ar^{n-1}$ jika n = 4m − 1 atau n = 4m
dengan a > 0, r > 0, dan m bilangan bulat positif.
Buktikan bahwa jumlah semua suku ke-1 sampai dengan suku ke-2009 adalah

$$\frac{a\left(1+r-r^{2009}+r^{2010}\right)}{1+r^2}$$

37. (USAMTS 1999-2000 Round 4) Tentukan nilai dari

$$S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$$

38. (Baltic Way 1992) Buktikan bahwa hasil kali 99 bilangan $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, k = 2, 3, 4, ⋯, 100 lebih dari $\frac{2}{3}$.

3. FUNGSI

A. Pengertian

Misalkan diketahui fungsi y = f(x) = $\frac{x+1}{3-2x}$.

Untuk mencari nilai dari f(2) maka cukup mengganti x di ruas kanan dengan 2.

Jadi, f(2) = $\frac{(2)+1}{3-2(2)}$ = –3

Salah satu fungsi yang dibahas di dalam kelas adalah fungsi kuadrat, yaitu fungsi yang berbentuk y = f(x) = $ax^2 + bx + c$

Nilai x yang menyebabkan y maksimum adalah $x_p = -\frac{b}{2a}$

Nilai y maksimum = $y_{maks} = a(x_p)^2 + bx_p + c$ atau $y_{maks} = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$

Terkadang suatu fungsi tidak hanya memiliki satu variabel, tetapi dapat lebih dari satu variabel. Sebagai contoh adalah $f(x,y) = xy + x^2y + y^3$. Untuk mencari f(1, 2) cukup mengganti x = 1 dan y = 2 dari persamaan tersebut didapat f(1, 2) = 2 + 2 + 8 = 12.

Contoh 33 :

Misal f adalah suatu fungsi yang memetakan dari bilangan bulat positif ke bilangan bulat positif dan didefinisikan dengan : f(ab) = b⋅f(a) + a⋅f(b). Jika f(10) = 19 ; f(12) = 52 dan f(15) = 26. Tentukan nilai dari f(8).

Solusi :

f(120) = f(10 ⋅ 12) = 12f(10) + 10f(12) = 12 ⋅ 19 + 10 ⋅ 52 = 748 ············ (1)

f(120) = f(8 ⋅ 15) = 8f(15) + 15f(8) = 8 ⋅ 26 + 15f(8) = 208 + 15f(8) ··········· (2)

748 = 208 + 15f(8)

Jadi, f(8) = 36

Contoh 34 :

(AHSME 1998) Misalkan f(x) adalah fungsi yang memenuhi

(a) untuk setiap bilangan real x dan y maka f(x + y) = x + f(y) dan

(b) f(0) = 2

Nilai dari f(1998) adalah ·····

Solusi :

f(x + y) = x + f(y) dan f(0) = 2

Alternatif 1 :

f(x) = f(x + 0) = x + f(0)

f(x) = x + 2

Maka f(1998) = 2000

Alternatif 2 :

2 = f(0) = f(–1998 + 1998) = –1998 + f(1998)

Maka f(1998) = 2000

Contoh 35 :

Jika f(x) adalah fungsi yang tidak terdefinisi untuk x = 0 dengan f(x) + 2f($\frac{1}{x}$) = 3x. Tentukan f(x).

Solusi :

f(x) + 2f($\frac{1}{x}$) = 3x ··················· (1)

Jika y = $\frac{1}{x}$ maka

$f(\frac{1}{y}) + 2f(y) = \frac{3}{y}$

sehingga

$f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = \frac{3}{x}$

$2f(\frac{1}{x}) + 4f(x) = \frac{6}{x}$ .... (2)

Kurangkan persamaan (2) dengan (1) didapat

$3f(x) = \frac{6}{x} - 3x$

Jadi, $f(x) = \frac{2-x^2}{x}$

B. Fungsi Komposisi

Fungsi komposisi merupakan gabungan lebih dari satu fungsi.

Misalkan diketahui fungsi f(x) dan g(x). Jika ingin mencari pemetaan suatu nilai terhadap fungsi f(x) yang hasilnya dilanjutkan terhadap fungsi g(x), maka akan digunakan fungsi komposisi.

Pemetaan terhadap fungsi f(x) yang dilanjutkan oleh fungsi g(x) ditulis sebagai (g(x) o f(x)).

Didefinisikan (g(x) o f(x)) = g(f(x)).

Contoh 36 :

Diketahui f(x) = 3x + 5 dan g(x) = 7 − 3x. Tentukan pemetaan x = 2 oleh fungsi f(x) dilanjutkan g(x).

Solusi :

f(2) = 3(2) + 5 = 11

g(11) = 7 − 3(11) = −26

Jadi, pemetaan x = 2 oleh fungsi f(x) dilanjutkan oleh g(x) menghasilkan nilai −26.

Cara lain adalah dengan memanfaatkan definisi fungsi komposisi.

(g(x)of(x)) = g(f(x)) = g(3x + 5) = 7 − 3(3x + 5) = −8 − 9x

Untuk x = 2 maka nilai g(f(2)) = −8 − 9(2) = −26.

Jadi, pemetaan x = 2 oleh fungsi f(x) dilanjutkan oleh g(x) adalah −26.

Contoh 37 :

Diketahui f(x) = x + 7 dan (fog)(x) = 5x + 3. Tentukan g(x).

Solusi :

f(g(x)) = g(x) + 7

5x + 3 = g(x) + 7

g(x) = 5x − 4

Contoh 38 :

Jika g(x − 5) = 7x + 3 maka tentukan g(x).

Solusi :

Alternatif 1 :

Pada alternatif 1 ini kita ubah variabel x pada ruas kanan ke dalam (x − 5).

g(x − 5) = 7x + 3 = 7(x − 5) + 38

Maka g(x) = 7x + 38

Alternatif 2 :

Kita misalkan x − 5 = y sehingga x = y + 5.

Maka g(y) = 7(y + 5) + 3

g(y) = 7y + 38

Maka g(x) = 7x + 38

Contoh 39 :
Diketahui $(gof)(x) = 2x^2 + 5x - 5$ dan $f(x) = x - 1$. Maka $g(x) = \cdots\cdots$

Solusi :
$(gof)(x) = 2x^2 + 5x - 5$
$g(f(x)) = 2x^2 + 5x - 5$
$g(x - 1) = 2x^2 + 5x - 5$

Alternatif 1 :
$g(x - 1) = 2(x - 1)^2 + 4x - 2 + 5x - 5$
$g(x - 1) = 2(x - 1)^2 + 9x - 7$
$g(x - 1) = 2(x - 1)^2 + 9(x - 1) + 2$
Maka $g(x) = 2x^2 + 9x + 2$

Alternatif 2 :
Misalkan $y = x - 1$ maka $x = y + 1$
$g(y) = 2(y + 1)^2 + 5(y + 1) - 5$
$g(y) = 2y^2 + 9y + 2$
Maka $g(x) = 2x^2 + 9x + 2$

Contoh 40 :
Diketahui $(gof)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$ dan berlaku $f(x) > 1$ untuk $x > -\frac{1}{2}$, maka $f(x - 2)$ adalah $\cdots\cdot$

Solusi :
$g(f(x)) = 4x^2 + 4x$
$(f(x))^2 - 1 = 4x^2 + 4x$
$(f(x))^2 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$
Karena $f(x) > 1$ untuk $x > -\frac{1}{2}$ maka
$f(x) = 2x + 1$
$f(x - 2) = 2(x - 2) + 1$
$f(x - 2) = 2x - 3$
Jadi, $f(x - 2) = 2x - 3$

C. Fungsi Invers dari $y = f(x)$

Berdasarkan fungsi $y = f(x) = \frac{x+1}{3-2x}$ dari keterangan sebelumnya jika diketahui nilai x kita dengan mudah mencari nilai y. Bagaimana caranya bila yang diketahui adalah nilai y dan kita diminta mencari nilai x untuk nilai y tersebut ? Persoalan ini dapat diselesaikan apabila kita bisa mendapatkan fungsi inversnya yaitu $x = f(y)$.

Contoh 41 :
Tentukan invers dari fungsi $y = f(x) = 3x - 8$

Solusi :
$y = 3x - 8$
$x = \frac{y+8}{3}$
Didapat fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+8}{3}$

Contoh 42 :

Tentukan invers dari fungsi y = f(x) = $\frac{x+1}{3-2x}$.

Solusi :

Dari y = $\frac{x+1}{3-2x}$ didapat 3y – 2yx = x + 1 sehingga

x(2y + 1) = 3y – 1

x = $\frac{3y-1}{2y+1}$

Didapat fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

D. Hubungan fungsi invers dengan fungsi komposisi.

Misalkan $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ berturut-turut menyatakan fungsi invers dari f(x) dan g(x). Maka

$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Contoh 43 :

Jika f(x) = 5x + 3 dan g(x) = $\frac{2x+3}{5-x}$ maka tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$.

Solusi :

Alternatif 1 :

Berdasarkan keterangan dalam pembahasan mengenai fungsi komposisi akan didapat

(f o g)(x) = $\frac{7x+30}{5-x}$.

Maka invers dari (f o g)(x) tersebut adalah

$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{5x-30}{x+7}$

Alternatif 2 :

Berdasarkan apa yang dipelajari sebelumnya akan didapat

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \frac{5x-3}{x+2}$ sehingga

$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{5x-30}{x+7}$

Jadi, didapat $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

LATIHAN 3 :

1. Jika f(x) = –x + 3, maka $f(x^2) + (f(x))^2 - 2f(x)$ = ·······
2. Diketahui g(x) = x + 1 dan (gof)(x) = $3x^2 + 4$. Maka f(x) = ·······
3. (OSK 2007) Misalkan f(x) = 2x - 1, dan g(x) = $\sqrt{x}$. Jika f(g(x)) = 3, maka x = ·········
4. Diketahui (fog)(x) = 5x. Jika g(x) = $\frac{1}{5x-1}$, maka f(x) = ········
5. Fungsi g(x) = $x^2 + 2x + 5$ dan (f(g(x)) = $3x^2 + 6x - 8$, maka f(x) = ········
6. Jika f(x) = 2x + 1 ; g(x) = $5x^2 + 3$ dan h(x) = 7x, maka (fogoh)(x) = ····

7. Ditentukan $f(x) = \frac{ax+1}{2-x}$. Jika $f^{-1}(4) = 1$, maka f(3) = ·······

8. Jika $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$ dan $g^{-1}(x) = 2x - 1$, maka $(g \circ f)^{-1}(x) =$ ······

9. Jika f(x) = $\sqrt{x^2 + 1}$ dan (fog)(x) = $\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x-2}$ dan berlaku g(x) ≥ 0 untuk x > 2, maka g(x – 3) = ·····

10. (OSK 2011 Tipe 3) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi f(xy) = $\frac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positif x dan y. Jika f(100) = 3 maka f(10) adalah ·····

11. (OSK 2003) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi
$$f\left(\tfrac{1}{x}\right) + \tfrac{1}{x} f(-x) = 2x$$
untuk setiap bilangan real x ≠ 0. Berapakah nilai f(2) ?

12. (AHSME 1996) Sebuah fungsi f : Z → Z dan memenuhi
$$f(n) = \begin{cases} n + 3 & \text{jika n ganjil} \\ \frac{n}{2} & \text{jika n genap} \end{cases}$$
Misalkan k adalah bilangan ganjil dan f(f(f(k))) = 27. Tentukan penjumlahan digit-digit dari k.

13. (OSP 2004) Misalkan f sebuah fungsi yang memenuhi f(x) f(y) – f(xy) = x + y, untuk setiap bilangan bulat x dan y. Berapakah nilai f(2004) ?

14. (OSK 2006) Jika f(xy) = f(x + y) dan f(7) = 7, maka f(49) = ····

15. (NHAC 1998-1999 Second Round) Misalkan f adalah fungsi untuk semua bilangan bulat x dan y yang memenuhi f(x + y) = f(x) + f(y) + 6xy + 1 dan f(–x) = f(x). Nilai dari f(3) sama dengan ······

16. (OSP 2009) Suatu fungsi f : Z → Q mempunyai sifat $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap x ∈ Z. Jika f(2) = 2, maka nilai fungsi f(2009) adalah ·····

17. (AIME 1988) Misalkan f(n) adalah kuadrat dari jumlah angka-angka n. Misalkan juga $f^2(n)$ didefiniskan sebagai f(f(n)), $f^3(n)$ sebagai f(f(f(n))) dan seterusnya. Tentukan nilai dari $f^{1998}(11)$.

4. SUKU BANYAK

A. Pengertian Suku Banyak

Perhatikan bentuk-bentuk aljabar berikut :

(i) $x^2 - 5x + 9$

(ii) $4x^3 + 6x - 2x$

(iii) $2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + x - 5$

(iv) $-2x^5 + x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 3x - 4$

Bentuk-bentuk aljabar di atas disebut juga dengan suku banyak atau polinom dalam peubah (variabel) x. Yang dimaksud derajat suatu sukubanyak dalam peubah x adalah pangkat tertinggi dari peubah x yang termuat dalam suku banyak tersebut.

Suku banyak pada (i) memiliki derajat 2 sedangkan suku banyak pada (ii), (iii) dan (iv) berturut-turut berderajat 3, 4 dan 5.

B. Kesamaan Suku Banyak

Misalkan terdapat dua buah suku banyak f(x) dan g(x) yang dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut :

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_o$ dan

$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_o$

Kalau f(x) sama dengan g(x) (dapat ditulis $f(x) \equiv g(x)$) maka harus memenuhi

$a_n = b_n$; $a_{n-1} = b_{n-1}$; $a_{n-2} = b_{n-2}$; $\cdots$; $a_1 = b_1$; $a_o = b_o$

Contoh 44 :

Diketahui kesamaan dua buah suku banyak $p(x + 1) + q(x - 1) \equiv 7x - 3$. Nilai $p + 2q = \cdots\cdot$

Solusi :

$p(x + 1) + q(x - 1) \equiv 7x - 3$

$px + p + qx - q \equiv 7x - 3$

$(p + q)x + p - q \equiv 7x - 3$

Berdasarkan kesamaan dua suku banyak maka

$p + q = 7$ dan $p - q = -3$ yang menghasilkan $p = 2$ dan $q = 5$

Jadi, $p + 2q = (2) + 2(5) = 12$

C. Pembagian Suku Banyak

Sebagaimana pembagian dalam bilangan, pembagian suku banyak pun memiliki kemiripan dengan pembagian pada bilangan tersebut. Pembagian f(x) oleh p(x) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = p(x) \cdot g(x) + s(x)$$

dengan

f(x) adalah suku banyak yang akan dibagi

p(x) adalah pembagi

g(x) adalah hasil bagi

s(x) adalah sisa pembagian

Sebagaimana dalam pembagian bilangan, persyaratan s(x) adalah bahwa pangkat tertinggi (derajat) dari s(x) harus kurang dari p(x).

Cara pembagian dalam suku banyak pun mengikuti pembagian dalam bilangan.

Contoh 45 :

Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ dibagi $x^2 + 4x - 2$

Solusi :

$f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7 = (x^2 + 4x - 2) \cdot q(x) + s(x)$

Karena f(x) berderajat 4 maka q(x) akan berderajat 2 sehingga $q(x) = ax^2 + bx + c$

Karena koefisen x^4 dari f(x) sama dengan 4 maka koefisien x^2 dari q(x) juga 4 sehingga a = 4.
Kalikan $4x^2$ dengan $(x^2 + 4x - 2)$ didapat $4x^4 + 16x^3 - 8x^2$. Kurangkan $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ dengan $4x^4 + 16x^3 - 8x^2$ didapat $-13x^3 + 6x^2 + x - 7$. Karena koefisien x^3 sama dengan -13 maka koefisien x dari q(x) sama dengan -13 sehingga b = -13.
Kalikan $-13x$ dengan $(x^2 + 4x - 2)$ didapat $-13x^3 - 52x^2 + 26x$. Kurangkan $-13x^3 + 6x^2 + x - 7$ dengan $-13x^4 - 52x^2 + 26x$ didapat $58x^2 - 25x - 7$. Karena koefisien x^2 sama dengan 58 maka konstanta dari q(x) sama dengan 58 sehingga c = 58.
Kalikan 58 dengan $(x^2 + 4x - 2)$ didapat $58x^2 + 232x - 116$. Kurangkan $58x^2 - 25x - 7$ dengan $58x^2 + 232x - 116$ didapat $-257x + 109$.
Jadi, $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7 = (x^2 + 4x - 2) \cdot (4x^2 - 13x + 58) - 257x + 109$.
Maka pembagi dan sisa jika suku banyak $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ dibagi $x^2 + 4x - 2$ berturut-turut adalah $4x^2 - 13x + 58$ dan $-257x + 109$.

Contoh 45 merupakan pembagian suku banyak dengan cara pembagian bersusun. Apabila pembaginya linier maka pembagian juga dapat dilakukan dengan cara horner.

Contoh 46 :
Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ dibagi $x - 2$

Solusi :

2	1	2	3	−5	
		2	8	22	
	1	4	11	17	+

Maka pembagian $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ oleh $x - 2$ akan menghasilkan $x^2 + 4x + 11$ dengan sisa 17.

D. Teorema Sisa

Dari penjelasan sebelumnya telah kita dapatkan bahwa

$$f(x) = p(x) \cdot g(x) + s(x)$$

Jika diambil $p(x) = x - k$ maka akan didapat $f(x) = (x - k) \cdot g(x) + s$
Jika diambil $x = k$ maka didapat $f(k) = s$

Jadi, didapat suatu teorema bahwa jika suku banyak f(x) dibagi oleh x − k maka sisanya adalah f(k).

Teorema di atas dikenal dengan nama teorema sisa atau dalil sisa.
Lebih lanjut dengan cara yang sama didapat bahwa jika f(x) dibagi (ax + b) maka sisanya adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Contoh 47 :
Tentukan sisanya jika $f(x) = x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 6$ dibagi $x - 2$

Solusi :
Dengan teorema sisa akan didapat sisa jika f(x) dibagi x − 2 adalah f(2).
Sisa = $f(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 6 = -34$.
Jadi, sisa jika $f(x) = x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 8x + 6$ dibagi $x - 2$ adalah -34.
Coba kerjakan soal di atas dengan cara Horner.

Contoh 48 :
Diketahui bahwa f(x) jika dibagi x − 1 bersisa 5 sedangkan jika dibagi x + 1 akan bersisa 3. Maka jika f(x) dibagi $x^2 - 1$ akan memiliki sisa ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

Solusi :
Persoalan ini sama saja dengan menentukan s(x) jika f(x) = (x – 1)(x + 1) g(x) + s(x) dengan f(1) = 5 dan f(–1) = 3.
Telah dijelaskan sebelumnya bahwa derajat sisa selalu kurang dari pembagi. Karena derajat pembagi sama dengan 2 maka kita dapat memisalkan bahwa derajat sisa sama dengan 1.
Jadi, dapat dimisalkan bahwa s(x) = ax + b.
Jika ternyata derajat s(x) sama dengan 0 maka akan didapat bahwa a = 0.
Maka f(x) = (x – 1)(x + 1) g(x) + ax + b
Karena f(1) = 5 maka f(1) = a + b = 5 .... (1)
Karena f(–1) = 3 maka f(–1) = –a + b = 3 .... (2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat a = 1 dan b = 4
Jadi, f(x) dibagi $x^2 - 1$ akan memiliki sisa x + 4

E. Teorema Faktor

Setelah mempelajari teorema sisa, maka selanjutnya akan dipelajari pengertian faktor dalam suku banyak. Pengertian faktor dalam suku banyak dapat dinyatakan dalam bentuk teorema faktor berikut :

Misalkan f(x) adalah suku banyak. (x – k) merupakan faktor dari f(x) jika dan hanya jika f(k) = 0

Perhatikan bahwa pernyataan di atas merupakan biimplikasi. Sehingga pernyataan di atas memiliki arti :
(1) Jika (x – k) merupakan faktor dari f(x) maka f(k) = 0
(2) Jika f(k) = 0 maka (x – k) merupakan faktor dari f(x)

Pada contoh di atas memiliki arti juga bahwa k adalah merupakan akar-akar persamaan f(x) = 0.
Jika f(x) merupakan suku banyak dalam derajat n maka ada paling banyak n buah akar real persamaan f(x) = 0.

Contoh 49 :
Tunjukkan bahwa (x + 2) merupakan faktor dari f(x) = $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 8x + 8$.

Solusi :
$f(-2) = (-2)^4 + 3(-2)^3 + 4(-2)^2 + 8(-2) + 8 = 0$
Karena f(–2) = 0 maka sesuai teorema faktor maka (x + 2) merupakan faktor dari f(x). Terbukti.

Contoh 50 :
Tentukan semua faktor linier dari $x^4 - 2x^3 - 13x + 14x + 24 = 0$

Solusi :
Kita akan mencoba menyelesaikannya dengan horner.
Faktor bulat dari 24 adalah ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 dan ±24. Kita akan mencoba akar-akar tersebut jika ada.

1	1	–2	–13	14	24
		1	–1	–14	0
	1	–1	–14	0	24 +

Karena sisanya tidak sama dengan 0 maka (x – 1) bukan faktor.

2	1	–2	–13	14	24
		2	0	–26	–24
	1	0	–13	–12	0 +

Karena sisanya sama dengan 0 maka (x – 2) adalah faktor linier.
$x^4 – 2x^3 – 13x + 14x + 24 = (x – 2)(x^3 – 13x – 12)$

-1	1	0	-13	-12	
		-1	1	12	
	1	–1	–12	0	+

Karena sisanya sama dengan 0 maka (x + 1) adalah faktor linier.
$x^4 – 2x^3 – 13x + 14x + 24 = (x – 2)(x + 1)(x^2 – x – 12)$
$x^4 – 2x^3 – 13x + 14x + 24 = (x – 2)(x + 1)(x – 4)(x + 3)$
Maka faktor-faktor linier dari $x^4 – 2x^3 – 13x + 14x + 24$ adalah (x + 1), (x – 2), (x + 3) dan (x – 4).

F. Teorema Vieta

Jika $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x^1 + a_0$ adalah polinomial dengan pembuat nol : x_1, x_2, x_3, ···, x_n, (dengan kata lain x_1, x_2, x_3, ···, x_n adalah akar-akar p(x) = 0) maka hubungan-hubungan berikut berlaku :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j} x_i x_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k = x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + \cdots + x_2x_3x_4 + x_2x_4x_5 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3 \cdots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Contoh 51 :
Persamaan kuadrat $x^2 + 5x – 7 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Tentukan nilai $x_1^3 + x_2^3$.

Solusi :
Dari persamaan $x^2 + 5x – 7 = 0$ didapat nilai A = 1, B = 5 dan C = –7
$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} = –5$
$x_1x_2 = \frac{C}{A} = –7$
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 – 3x_1^2x_2 – 3x_1x_2^2$
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 – 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
$x_1^3 + x_2^3 = (–5)^3 – 3(–7)(–5) = –125 – 105$
$x_1^3 + x_2^3 = –230$.

Contoh 52 :
Persamaan suku banyak $x^4 – 5x^3 – 16x^2 + 41x – 15 = 0$ memiliki akar-akar a, b, c dan d. Maka nilai dari
a. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
b. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$
adalah ······

Solusi :
a + b + c + d = 5
ab + ac + ad + bc + bd + cd = –16
abc + abd + acd + bcd = –41
abcd = –15

a. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) = 5^2 - 2(-16) = 57$

b. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd} = \frac{-41}{-15} = \frac{41}{15}$

Contoh 53 :
(OSP 2005/Canadian MO 1996) Jika α, β dan γ adalah akar-akar $x^3 - x - 1 = 0$ maka tentukan nilai $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

Solusi :
Dengan melihat $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ dan $x^3 - x - 1 = 0$ didapat A = 1, B = 0, C = –1 dan D = –1.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{B}{A} = 0$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{C}{A} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

$$= \frac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma}$$

$$= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{1-(0)+(-1)-(1)}$$

$$= -7$$

LATIHAN 4 :

1. Jika f(x) dibagi dengan (x – 2) sisanya 24, sedangkan jika dibagi dengan (x + 5) sisanya 10. Jika f(x) dibagi dengan $x^2 + 3x - 10$ sisanya adalah ······

2. Jika v(x) dibagi $x^2 - x$ dan $x^2 + x$ berturut-turut akan bersisa 5x + 1 dan 3x + 1, maka bila v(x) dibagi $x^2 - 1$ sisanya adalah ····

3. (OSP 2006) Jika $(x - 1)^2$ membagi $ax^4 + bx^3 + 1$, maka ab = ····

4. (OSK 2008) Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka b = ··········

5. (AHSME 1999) Tentukan banyaknya titik potong maksimal dari dua grafik y = p(x) dan y = q(x) dengan p(x) dan q(x) keduanya adalah suku banyak berderajat empat dan memenuhi koefisien x^4 dari kedua suku banyak tersebut adalah 1.

6. Suku banyak f(x) dibagi (x + 1) sisanya –2 dan dibagi (x – 3) sisanya 7. Sedangkan suku banyak g(x) jika dibagi (x + 1) akan bersisa 3 dan jika dibagi (x – 3) akan bersisa 2. Diketahui h(x) = f(x) · g(x). Jika h(x) dibagi $x^2 - 2x - 3$, maka sisanya adalah ······

7. (OSP 2009) Misalkan $p(x) = x^2 - 6$ dan $A = \{x \in R \mid p(p(x)) = x\}$. Nilai maksimal dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah ······

8. Jika persamaan $(3x^2 - x + 1)^3$ dijabarkan dalam suku-sukunya maka akan menjadi persamaan polinomial $a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tentukan nilai dari :
   a) $a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$
   b) $a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$
   c) $a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$
   d) $a_6 + a_4 + a_2 + a_0$

9. (OSK 2010) Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b, dan c. Nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$ adalah ········

10. Tentukan semua nilai m sehingga persamaan $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ memiliki 4 akar real yang membentuk barisan aritmatika.

11. (OSP 2008) Misalkan a, b, c, d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari a + b + c + d adalah ··

12. (OSP 2010) Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ······

13. (AIME 1996) Akar-akar $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ adalah a, b dan c. Persamaan pangkat tiga dengan akar-akar a + b, a + c dan b + c adalah $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$. Tentukan nilai t.

14. (OSK 2003/South Carolina MC 1996) Misalkan bahwa $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ dan bahwa f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5). Berapakah nilai a ?

15. (AIME 1993) Misalkan $p_o(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ dan $p_n(x) = p_{n-1}(x - n)$. Tentukan koefisien x dari $p_{20}(x)$.

16. (OSP 2009) Misalkan a, b, c adalah akar-akar polinom $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ adalah polinom dengan akar-akar a + b – c, b + c – a, c + a – b maka f(1) = ······

17. (NAHC 1995-1996 Second Round) Misalkan $p(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ adalah polinomial yang memenuhi p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 4, p(5) = 5 dan p(6) = 6. Nilai dari p(7) adalah ·····

18. (OSP 2010) Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika P(1) = 10, P(2) = 20, dan P(3) = 30, maka nilai
$$\frac{P(12) + P(-8)}{10} = \text{..........}$$

19. (AIME 2003 Bagian Kedua) Akar-akar persamaan $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ adalah a, b, c dan d. Tentukan nilai dari p(a) + p(b) + p(c) + p(d) jika $p(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$.

20. (Canadian MO 1970) Diberikan polinomial $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ dengan koefisien $a_1, a_2, \cdots, a_n$ semuanya bulat dan ada 4 bilangan bulat berbeda a, b, c dan d yang memenuhi f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5. Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat k yang memenuhi f(k) = 8.

5. PERSAMAAN

Ada beberapa persamaan yang akan dibahas, yaitu :

A. Persamaan Kuadrat

Bentuk persamaan kuadrat adalah $Ax^2 + Bx + C = 0$.

1) Pengertian akar

Misalkan x_1 dan x_2 adalah nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat di atas. Nilai x_1 dan x_2 dikenal juga dengan akar-akar. Maka berlaku.

$Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0$

$Ax_2^2 + Bx_2 + C = 0$

2) Menentukan nilai akar-akar persamaan kuadrat

Untuk mencari nilai x yang memenuhi dapat dicari dengan cara kuadrat sempurna, memfaktorkan maupun dengan menggunakan rumus $x_{1,2} = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ sebagaimana yang telah didapatkan dari pelajaran di kelas.

Persamaan $B^2 - 4AC$ dikenal dengan nama diskriminan. Nilai diskriminan ini menentukan jenis-jenis akar (nilai x_1 dan x_2). Ada tiga kemungkinan nilai diskriminan.

- Jika $B^2 - 4AC > 0$ maka x_1 dan x_2 keduanya real dan berbeda.
- Jika $B^2 - 4AC = 0$ maka $x_1 = x_2$ serta x_1 dan x_2 keduanya real.
- Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka x_1 dan x_2 keduanya tidak real.

3) Hubungan kedua akar

Persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar x_1 dan x_2 dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$.

Misalkan terdapat persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ yang memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Maka hubungan antara x_1 dan x_2 adalah sebagai berikut.

$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$

4) Menentukan persamaan kuadrat baru.

Misalkan persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Ada beberapa cara jika ingin menentukan persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar x_3 dan x_4 dan memiliki hubungan tertentu dengan x_1 dan x_2.

a. Membawa ke dalam persamaan $x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4 = 0$.

Misalkan terdapat persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$ yang memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Dari keterangan sebelumnya akan didapatkan nilai dari $x_1 + x_2$ dan x_1x_2.

Jika dapat ditentukan nilai dari $x_3 + x_4$ dan x_3x_4 ke dalam bentuk $x_1 + x_2$ dan x_1x_2 maka berarti nilai dari $x_3 + x_4$ dan x_3x_4 dapat ditentukan sehingga akan didapat persamaan kuadrat yang memiliki akar-akar x_3 dan x_4 yaitu $x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4 = 0$.

b. Melakukan subtitusi setelah menghilangkan indeks

Jika dari hubungan x_3 dan x_4 yang memiliki hubungan tertentu dengan x_1 dan x_2 kita hilangkan indeksnya lalu kita subtitusikan ke persamaan semula dan mendapatkan persamaan kuadrat baru. Maka persamaan kudarat tersebut memiliki akar-akar x_3 dan x_4.

5) Menentukan nilai suatu bilangan yang berbentuk $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ dan $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

Jika $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dan $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ keduanya dikuadratkan akan didapat

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

Sehingga dapat ditentukan nilai dari $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ dan $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$, yaitu

$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ dengan syarat $a \geq b$.

Contoh 54 :
Jika salah satu akar $x^2 + (a + 1)x + (3a + 2) = 0$ adalah 5, maka akar lainnya adalah ····

Solusi :
Sesuai pengertian akar maka akan didapat
$5^2 + (a + 1) \cdot 5 + (3a + 2) = 0$
$a = -4$
Persamaan kuadrat tersebut adalah
$x^2 + (-4 + 1)x - (3(-4) + 2) = 0$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$(x - 5)(x + 2) = 0$
$x_1 = 5$ dan $x_2 = -2$
Jadi, akar lainnya adalah -2.

Contoh 55 :
Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $cx^2 + bx + a = 0$, maka $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ = ······

Solusi :
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{c}$

$x_1x_2 = \frac{a}{c}$

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2}$

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

Contoh 56 :
Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 24 = 0$ adalah ·······

Solusi :
Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 24 = 0$.
Maksud soal adalah menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_3 = x_1 + 3$ dan $x_4 = x_2 + 3$.
Alternatif 1 :
$x_1 + x_2 = -5$ dan $x_1x_2 = -24$
$x_3 + x_4 = (x_1 + x_2) + 6 = 1$
$x_3 \cdot x_4 = (x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = -24 - 15 + 9 = -30$
Persamaan kuadrat baru adalah $x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4 = 0$.
Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - x - 30 = 0$

Alternatif 2 :
Misalkan $y_3 = x_1 + 3$ dan $y_4 = x_2 + 3$
Jika indeks dihilangkan akan didapat y = x + 3. Subtitusikan x = y − 3 ke persamaan semula.
$(y - 3)^2 + 5(y - 3) - 24 = 0$
$y^2 - y - 30 = 0$
$y^2 - y - 30 = 0$ merupakan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $x_1 + 3$ dan $x_2 + 3$.
Jadi, persamaan kuadrat yang diminta adalah $x^2 - x - 30 = 0$

Contoh 57 :
$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \cdots\cdots$

Solusi :
$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6+2+2\sqrt{6\cdot 2}}$. Memperhatikan $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, maka
$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

Contoh 58 :
(AIME 1983) Tentukan hasil kali semua akar-akar real $x^2+18x+30 = 2\sqrt{x^2+18x+45}$.

Solusi :
Misalkan $y = x^2 + 18x + 30$ dan kuadratkan kedua ruas persamaan semula, maka
$y^2 = 4(y + 15)$
$(y - 10)(y + 6) = 0$
Karena akar dari suatu bilangan tak mungkin negatif maka nilai y yang memenuhi hanya y = 10.
Jadi, terdapat dua akar yang tidak real.
$x^2 + 18x + 30 = 10$ sehingga $x^2 + 18x + 20 = 0$
Jadi, hasil kali kedua akar persamaan $x^2 + 18x + 20 = 0$ sama dengan 20.

Contoh 59 :
(OSK 2002) Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga

$$\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$$

Tentukan nilai $\frac{a}{b}$.

Solusi :
Karena $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$ maka
$\frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}} = 2$
Misal $\frac{a}{b} = x$, maka
$\frac{x+10}{1+10x} = 2 - x$
$x + 10 = 2 - 10x^2 + 19x$
$(5x - 4)(x - 1) = 0$
$x = 1$ atau $x = \frac{4}{5}$
Jadi, karena $a \neq b$, maka $x \neq 1$.
Jadi, $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

LATIHAN 5.A

1. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua lebih besar dari akar-akar $x^2 + px + 1 = 0$ tapi tiga lebih kecil dari akar-akar persamaan $2x^2 - 3x + q = 0$ adalah ····
2. Jika $p = \frac{1+3x^2}{x-x^2}$ maka batas-batas p supaya x real adalah ···
3. Jika kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - px + p = 0$ bernilai real positif, maka batas-batas nilai p yang memenuhi adalah ····
4. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $x^2 + 2x + 4 = 0$, maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{x_1-1}$ dan $\frac{1}{x_2-1}$ adalah ·····
5. (OSK 2005) Misalkan a dan b adalah bilangan real taknol yang memenuhi $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$. Tentukan $\frac{a}{b}$.
6. (AIME 1990) Tentukan nilai dari $\left(52+6\sqrt{43}\right)^{3/2} - \left(52-6\sqrt{43}\right)^{3/2}$.
7. (AIME 1990) Tentukan penyelesaian positif $\frac{1}{x^2-10x-29} + \frac{1}{x^2-10x-45} = \frac{2}{x^2-10x-69}$.
8. (OSK 2011 Tipe 1) Jumlah dari seluruh solusi persamaan $\sqrt[4]{x} = \frac{12}{7-\sqrt[4]{x}}$ adalah ....
9. Diketahui α dan β adalah dua bilangan berbeda yang memenuhi $\alpha^2 = 5\alpha - 9$ dan $\beta^2 = 5\beta - 9$. Nilai dari $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ adalah ······
10. (ARML 1999 Individual) Jika a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat $11x^2 - 4x - 2 = 0$. hitunglah nilai dari :
    $(1 + a + a^2 + \cdots)(1 + b + b^2 + \cdots)$
11. (OSP 2002) Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5,6} ?
12. (OSK 2010) Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ merupakan solusi kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ maka nilai a + b adalah ·····
13. (OSK 2010) Diketahui bahwa ada tepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2 + n + 2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ·······
14. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 6x + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 sedangkan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + (x_1^2 + x_2^2)x + 4 = 0$ adalah u dan v. Jika $u + v = -uv$ maka nilai dari $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$ adalah ········
15. α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 3(a - 1)x + 2a^2 + 4b = 0$. Jika $\alpha = 2\beta$ maka nilai dari a + b = ········

16. Jika suku pertama deret geometri tak hingga adalah 2 dan rasionya adalah r = $\frac{m}{\alpha}$ = $\frac{\beta}{m}$ untuk nilai m > 0 dan α, β akar-akar x^2 – (3m + 2) + (4m + 12) = 0, maka jumlah deret geometri tak hingga tersebut adalah ⋯

17. Diketahui $x^2 - (2p + 1)x + p = 0$ dengan akar-akar x_1 dan x_2 serta $3x^2 - (q - 1)x - 1 = 0$ dengan akar-akar x_3 dan x_4. Jika $x_1x_3 = 1$ dan $x_2x_4 = 1$, maka nilai dari p – 2q + 13 = ⋯⋯⋯

18. Jika a ≠ b dan jika persamaan-persamaan $x^2 + ax + bc = 0$ dan $x^2 + bx + ac = 0$ mempunyai tepat sebuah akar persekutuan, tunjukkan bahwa akar-akar yang lain dari kedua persamaan tersebut memenuhi persamaan $x^2 + cx + ab = 0$.

19. Misalkan α dan β adalah akar-akar persamaan $x^2 + px + 1 = 0$ sedangkan γ dan δ adalah akar-akar persamaan $x^2 + qx + 1 = 0$. Buktikan bahwa $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2$.

20. (AIME 1991) Misalkan k adalah penjumlahan semua nilai mutlak dari nilai-nilai x yang memenuhi $x = \sqrt{19} + \cfrac{91}{\sqrt{19} + \cfrac{91}{\sqrt{19} + \cfrac{91}{\sqrt{19} + \cfrac{91}{\sqrt{19} + \cfrac{91}{x}}}}}$. Tentukan nilai dari k^2.

21. Diketahui b_1, c_1, b_2 dan c_2 adalah bilangan real yang memenuhi $b_1b_2 = 2(c_1 + c_2)$. Tunjukkan bahwa sedikitnya satu dari dua persamaan $x^2 + b_1x + c_1 = 0$ dan $x^2 + b_2x + c_2 = 0$ memiliki akar-akar real.

22. Diberikan a, b, c ∈ bilangan real serta a dan 4a + 3b + 2c mempunyai tanda yang sama. Tunjukkan bahwa persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ kedua akarnya tidak mungkin terletak pada interval (1, 2).

B. Persamaan Eksponen

Dalam pembahasan hanya akan disinggung tentang sifat-sifat pada eksponen, yaitu :

(i) $a^0 = 1$ untuk a ≠ 0

(ii) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{nkali}$ untuk n ∈ N.

(iii) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

(iv) $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ untuk a ≠ 0

(v) $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$

(vi) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ untuk a ≠ 0

(vii) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ dengan syarat a ≥ 0.

(viii) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Contoh 60 :

Harga x yang memenuhi persamaan $4^{x+3} = \sqrt[4]{8^{x+5}}$ adalah .....

Solusi :

$4^{x+3} = \sqrt[4]{8^{x+5}}$

$2^{2(x+3)} = 2^{\frac{3(x+5)}{4}}$ (sifat (v) dan sifat (viii))

8(x + 3) = 3(x + 5)

$x = -\frac{9}{5}$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x = -\frac{9}{5}$.

Contoh 61 :

Manakah yang lebih besar : 2^{175} atau 5^{75} ? Buktikan.

Solusi :

$2^{175} = (2^7)^{25} = 128^{25}$ dan $5^{75} = (5^3)^{25} = 125^{25}$

$128^{25} > 125^{25}$

$2^{175} > 5^{75}$

Jadi, 2^{175} lebih besar dari 5^{75}.

Contoh 62 :

(OSK 2002) Bilangan $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ sama dengan .....

Solusi :

$$\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2} = \frac{2^{32}}{4^{16}} = \frac{2^{32}}{2^{32}} = 1$$

LATIHAN 5.B

1. Persamaan $3 \cdot \sqrt{27^{2x-1}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{243}}\right)^{3x}$ memberikan nilai x sama dengan .....

2. (OSK 2011 Tipe 3) Nilai dari $\frac{(2^{2010})^2 - (2^{2008})^2}{(2^{2011})^2 - (2^{2009})^2}$ adalah ......

3. Jika $5^{3x} = 8$, maka 5^{3+x} = ...

4. Jumlah akar-akar persamaan $5^{x+1} + 5^{6-x} = 11$ adalah ....

5. Himpunan penyelesaian dari $5^{8-2x} + 49 \cdot 5^{3-x} - 2 = 0$ adalah .....

6. Diberikan persamaan $3^{x^2-3x+2} + 3^{x^2-3x} = 10$. Jika x_1 dan x_2 adalah penyelesaiannya, maka $3^{x_1+x_2} = \cdots\cdots$

7. Persamaan $54(6^x) + 3^x = 6(18^x) + 9$ mempunyai penyelesaian x_1 dan x_2, maka $(x_1 \cdot x_2)^2$ = ...

C. Persamaan Logaritma

Pengertian : Jika $a^b = c$ maka $b = {}^a\log c$.

Sifat-sifat pada logaritma, yaitu :

(i) ${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$ dengan syarat a, p ≠ 1 dan a, b, p > 0

(ii) ${}^a\log a$ = 1 dengan syarat a > 0 dan a ≠ 1.

(iii) ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$ dengan a,b ≠ 1 dan a,b > 0

(iv) ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log (bc)$ dengan syarat a ≠ 1 dan a, b, c > 0

(v) ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right)$ dengan syarat a ≠ 1 dan a, b, c > 0

(vi) ${}^{a^n}\log b^m = {}^a\log b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\cdot{}^a\log b$ dengan syarat a ≠ 1 dan a, b > 0

(vii) ${}^a\log b^n = n \cdot {}^a\log b$ dengan syarat a ≠ 1 dan a, b > 0

(viii) ${}^a\log b \cdot {}^b\log c = {}^a\log c$ dengan syarat a, b ≠ 1 dan a, b, c > 0

(ix) $a^{{}^{a^m}\log b^n} = b^{\frac{n}{m}}$ dengan syarat a ≠ 1 dan a, b > 0.

Catatan : Bentuk ${}^a\log b$ kadang-kadang ditulis dengan $\log_a b$.

Contoh 63 :

Jika ${}^5\log 3 = a$ dan ${}^3\log 4 = b$, maka ${}^4\log 15 = \cdots\cdots$

Solusi :

Berdasarkan sifat (viii) maka didapat ${}^5\log 3 \cdot {}^3\log 4 = {}^5\log 4 = ab$

Berdasarkan sifat (iv) maka ${}^4\log 15 = {}^4\log 3 + {}^4\log 5$

Berdasarkan sifat (iii) maka ${}^4\log 15 = \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}$

Maka ${}^4\log 15 = \frac{a+1}{ab}$

Contoh 64 :

Himpunan penyelesaian pertidaksamaan :

$\frac{{}^2\log(2x-3)}{{}^2\log x} - {}^x\log (x + 6) + \frac{1}{{}^{x+2}\log x} = 1$

adalah .....

Solusi :

Berdasarkan sifat (i) dan (iii) maka persoalan di atas ekivalen dengan

${}^x\log (2x - 3) - {}^x\log (x + 6) + {}^x\log (x + 2) = 1$

Berdasarkan sifat (iv) dan (v) maka

${}^x\log\left(\frac{(2x-3)(x+2)}{x+6}\right) = 1$

Berdasarkan kesamaan maka

$(2x - 3)(x + 2) = x(x + 6)$

$2x^2 + x - 6 = x^2 + 6x$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)(x + 1) = 0$

$x_1 = 6$ dan $x_2 = -1$
Uji kedua nilai x tersebut ke persamaan awal.
$x = -1$ tidak memenuhi syarat basis pada ${}^{x}\log (x + 6)$ yaitu bahwa $x > 0$ dan $x \neq 1$.
Sedangkan $x = 6$ memenuhi syarat basis mapun numerus.
Jadi, himpunan semua nilai x yang memenuhi adalah {6}.

Contoh 65 :
(OSK 2004/AHSME 1952) Jika log p + log q = log (p + q), maka p dinyatakan dalam q adalah p = ····

Solusi :
$\log p + \log q = \log (p + q)$
$\log (pq) = \log (p + q)$
$pq = p + q$
$p(q - 1) = q$
Jadi, $p = \frac{q}{q-1}$

Contoh 66 :
Jika $\frac{{}^{b}\log a}{{}^{c}\log a} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{b}{c} = c^k$, maka k = ···

Solusi :
Berdasarkan sifat (i) akan didapat
$$\frac{{}^{b}\log a}{{}^{c}\log a} = \frac{\log c}{\log b} = \frac{\log c}{\log c^{k+1}} = \frac{1}{2}$$
Maka $k + 1 = 2$
Jadi, $k = 1$

Contoh 67 :
(OSP 2003) Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^{4}\log ({}^{2}\log x) + {}^{2}\log ({}^{4}\log x) = 2$?

Solusi :
Berdasarkan sifat (vi) maka ${}^{4}\log ({}^{2}\log x) = \frac{1}{2}\, {}^{2}\log ({}^{2}\log x)$ sehingga ${}^{4}\log ({}^{2}\log x) = {}^{2}\log ({}^{2}\log x)^{1/2}$
Berdasarkan sifat (vi) maka ${}^{2}\log ({}^{4}\log x) = {}^{2}\log (\frac{1}{2}\, {}^{2}\log x)$
${}^{4}\log ({}^{2}\log x) + {}^{2}\log ({}^{4}\log x) = 2$ sehingga ${}^{2}\log ({}^{2}\log x)^{1/2} + {}^{2}\log (\frac{1}{2}\, {}^{2}\log x) = 2$
Maka ${}^{2}\log \left(\sqrt{{}^{2}\log x} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x\right) = 2$
$$\sqrt{{}^{2}\log x} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot {}^{2}\log x = 2^2 = 4$$
$$\left({}^{2}\log x\right)^{3/2} = 8$$
${}^{2}\log x = 4$
$x = 4^2$
Jadi, $x = 16$

LATIHAN 5.C

1. $\frac{\left({}^3\log 45\right)^2 - \left({}^3\log 5\right)^2}{{}^3\log \sqrt[3]{15}}$ = ...

2. (OSK 2003) Misalkan $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Berapakah hasil kali abcdef ?

3. (AIME 1984) Bilangan real x dan y memenuhi ${}^8\log x + {}^4\log y^2 = 5$ dan ${}^8\log y + {}^4\log x^2 = 7$. Tentukan xy.

4. (AHSME 1998) Tentukan nilai dari
$$\frac{1}{{}^2\log 100!} + \frac{1}{{}^3\log 100!} + \frac{1}{{}^4\log 100!} + \cdots + \frac{1}{{}^{100}\log 100!}$$
dengan n! = 1 x 2 x 3 x ··· x n.

5. Batas-batas nilai p agar $f(x) = {}^2\log (px^2 + px + 3)$ terdefinisi pada setiap nilai x adalah ·····

6. Jika $x^{{}^3\log x + {}^3\log y} = 27$ dan $y^{{}^3\log x + {}^3\log y} = 3$ untuk x > y, maka x + y = ·····

7. Diketahui barisan 6 bilangan u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 dan u_6 serta $u_1 + u_6 = 11$ dan ${}^{10}\log u_3 + {}^{10}\log u_4 = 1$. Jika untuk setiap n = 1, 2, 3, ···, 5 berlaku $u_{n+1} = p \cdot u_n$ dan p > 1, maka ${}^{10}\log p$ = ····

8. (AIME 1983) Diketahui x, y dan z adalah bilangan real lebih dari 1 dan w adalah bilangan real positif. Jika ${}^x\log w = 24$, ${}^y\log w = 40$ dan ${}^{xyz}\log w = 12$, tentukan ${}^z\log w$.

9. (AIME 1988) Diberikan ${}^2\log ({}^8\log x) = {}^8\log ({}^2\log x)$. Tentukan nilai dari $({}^2\log x)^2$.

10. (AHSME 1997) Untuk bilangan asli n maka
$$f(n) = \begin{cases} {}^8\log n & \text{jika } {}^8\log n \text{ bilangan rasional} \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$
Nilai dari $3\sum_{n=1}^{1997} f(n)$

11. (AHSME 1998) Ada berapa banyak bilangan prima yang merupakan faktor dari N dan memenuhi ${}^2\log ({}^3\log ({}^5\log ({}^7\log N))) = 11$.

12. (ARML 2000 Individual) Jika b = 2000, hitunglah nilai deret tak hingga berikut :
$$\left({}^b\log 2\right)^0\left({}^b\log 5^{4^0}\right) + \left({}^b\log 2\right)^1\left({}^b\log 5^{4^1}\right) + \left({}^b\log 2\right)^2\left({}^b\log 5^{4^2}\right) + \ldots$$

13. (AIME 2002) Penyelesaian dari sistem persamaan ${}^{225}\log x + {}^{64}\log y = 4$ dan ${}^x\log 225 - {}^y\log 64 = 1$ adalah (x, y) = (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Nilai dari ${}^{30}\log (x_1y_1x_2y_2)$ adalah ······

D. Persamaan Lingkaran

1) Persamaan Lingkaran berpusat di (0,0) dan (a,b)

Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu, yaitu pusat lingkaran. Jadi ada dua hal yang sangat berkaitan dengan lingkaran yaitu jari-jari lingkaran, R, dan pusat lingkaran.

Dari pengertian lingkaran tersebut jika diturunkan akan didapat persamaan :

$x^2 + y^2 = r^2$ yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di (0,0) dan berjari-jari r.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di (a,b) dan berjari-jari r.
Jika persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dijabarkan akan didapat persamaan umum lingkaran yang berbentuk :
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Salah satu cara menentukan persamaan lingkaran jika diketahui pusat lingkaran dan persamaan garis yang menyinggung lingkaran tersebut adalah dengan memanfaatkan rumus jarak titik ke suatu garis lurus sebab jarak titik pusat ke garis singgung tersebut adalah merupakan jari-jari lingkaran. Misalkan suatu garis lurus memiliki persamaan Ax + By + C = 0. Maka rumus jarak titik (x_1, y_1) ke garis tersebut adalah $d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$.

2) Hubungan antara titik dengan lingkaran
Misalkan terdapat lingkaran dengan persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dan titik (p, q). Maka hubungan titik (p, q) dengan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ akan memiliki tiga kemungkinan hubungan :
a) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 < r^2$ maka titik (p, q) terletak di dalam lingkaran
b) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 = r^2$ maka titik (p, q) terletak pada lingkaran
c) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 > r^2$ maka titik (p, q) terletak di luar lingkaran

3) Hubungan antara garis lurus dengan lingkaran
Misalkan diketahui suatu garis lurus y = mx + c dan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Bagaimana hubungan antara garis lurus dan lingkaran tersebut ?
Subtitusikan persamaan y = mx + c ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ sehingga didapat suatu persamaan kuadrat dalam peubah x, yaitu $Ax^2 + Bx + C = 0$.
Dari persamaan tersebut dapat dihitung diskriminan = $B^2 - 4AC$.
(i) Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka garis lurus tidak memotong lingkaran
(ii) Jika $B^2 - 4AC = 0$ maka garis lurus menyinggung lingkaran
(iii) Jika $B^2 - 4AC > 0$ maka garis lurus memotong lingkaran di dua titik
Prinsip nilai diskriminan di atas tidak hanya dapat digunakan untuk mencari hubungan antara garis lurus dengan lingkaran tetapi juga hubungan antara garis lurus dengan irisan kerucut yang lain seperti parabola, elips maupun hiperbola.

4) Persamaan Garis Singgung pada Lingkaran
a) Garis singgung lingkaran dengan gradien tertentu
Misalkan diketahui bahwa garis singgung tersebut memiliki gradien m. Maka persamaan garis singgung dapat dinyatakan dengan
(i) Untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
Persamaan Garis Singgung, $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
(ii) Untuk lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Persamaan Garis Singgung, $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

b) Garis Singgung melalui titik pada lingkaran
Misalkan titik (x_1, y_1) terletak pada lingkaran maka persamaan garis singgung yang melalui titik tersebut dapat ditentukan dengan
(i) Untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
Persamaan Garis Singgung, $x_1x + y_1y = r^2$
(ii) Untuk lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Persamaan Garis Singgung, $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

c) Persamaan Garis Singgung melalui titik di luar lingkaran
Untuk menentukan persamaan garis singgung ini dapat dilakukan dengan beberapa cara :

(i) Dengan mencari rumus diskriminan lalu memanfaatkan pengertian hubungan antara garis lurus dengan lingkaran
(ii) Dengan menggunakan persamaan garis polar
(iii) Dengan memanfaatkan persamaan garis singgung dengan gradien m untuk mencari nilai m

Contoh 68 :
(OSK 2005) Titik A(a, b) disebut *titik letis* jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah

Solusi :
Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$
Karena $0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ maka pasangan (x, y) bulat yang memenuhi ada 12, yaitu (0, 5), (0, –5), (5, 0), (–5, 0), (3, 4), (3, –4), (–3, 4), (–3, –4), (4, 3), (4, –3), (–4, 3) dan (–4, –3).
Jadi, banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 ada 12.

Contoh 69 :
Persamaan lingkaran yang berpusat di (1, 4) dan menyinggung garis 3x – 4y – 2 = 0 adalah ······

Solusi :
Jarak pusat (1, 4) ke garis 3x – 4y – 2 = 0 sama dengan jari-jari lingkaran tersebut.
Jarak tersebut = d = $\left|\frac{3(1) - 4(4) - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right|$ = 3.
Persamaan lingkaran berpusat di (1, 4) dan memiliki jari-jari 3 adalah
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

Contoh 70 :
(OSK 2002) Untuk nilai a yang manakah garis lurus y = 6x memotong parabola $y = x^2 + a$ tepat di satu titik ?

Solusi :
Karena $6x = x^2 + a$ maka $x^2 - 6x + a = 0$
Diskriminan = $6^2 - 4(1)(a) = 36 - 4a$
Syarat agar y = 6x memotong parabola $y = x^2 + a$ di satu titik adalah Diskriminan = 0
36 – 4a = 0
Jadi, a = 9

Contoh 71 :
Persamaan garis singgung $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik (7, –5) adalah ·····

Solusi :
Subtitusi titik (7, –5) ke persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ didapat
$(7)^2 + (-5)^2 - 6(7) + 4(-5) - 12 = 0$
Artinya titik (7, –5) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
Persamaan garis singgungnya adalah (x – 3)(7 – 3) + (y + 2)(–5 + 2) = 25
Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik (7, –5) adalah
4x – 3y = 43

Contoh 72 :
Persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (4,2) ke lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ adalah ⋯⋯

Solusi :
Karena $4^2 + 2^2 > 10$ maka titik (4,2) terletak di luar lingkaran.

Alternatif 1 :
Persamaan garis melalui titik (4,2) dan gradien m adalah $y - 2 = m(x - 4)$. Subtitusi garis tersebut ke persamaan lingkaran didapat
$x^2 + (mx - 4m + 2)^2 = 10$
$(m^2 + 1)x^2 + 2(-4m^2 + 2m)x + 16m^2 - 16m - 6 = 0$
Diskriminan = $2^2(-4m^2 + 2m)^2 - 4(m^2 + 1)(16m^2 - 16m - 6)$
Agar $y - 2 = m(x - 4)$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ maka diskriminan harus sama dengan 0.
$2^2(-4m^2 + 2m)^2 - 4(m^2 + 1)(16m^2 - 16m - 6) = 0$
$16m^4 - 16m^3 + 4m^2 - 16m^4 + 16m^3 + 6m^2 - 16m^2 + 16m + 6 = 0$
$3m^2 - 8m - 3 = 0$
$(3m + 1)(m - 3) = 0$
Jika $m = -\frac{1}{3}$ maka garis singgung tersebut memiliki persamaan $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 4)$.
Jika $m = 3$ maka garis singgung tersebut memiliki persamaan $y - 2 = 3(x - 4)$.
Jadi, persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (4,2) adalah $x + 3y = 10$ dan $3x - y = 10$.

Alternatif 2 :
Misalkan titik $(x_o, y_o) = (4, 2)$.
Persamaan garis polar titik (x_o, y_o) terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ adalah $x_ox + y_oy = 10$ yaitu
$2x + y = 5$
Subtitusikan persamaan garis polar tersebut ke lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ didapat
$x^2 + (5 - 2x)^2 = 10$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_1 = 1$ atau $x_2 = 3$
Jika $x_1 = 1$ maka $y_1 = 3$ sehingga titik singgung dari garis singgung tersebut pada lingkaran adalah (1,3) sehingga persamaan garis singgungnya adalah $x + 3y = 10$.
Jika $x_2 = 3$ maka $y_2 = -1$ sehingga titik singgung dari garis singgung tersebut pada lingkaran adalah (3,−1) sehingga persamaan garis singgungnya adalah $3x - y = 10$.
Jadi, persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (4,2) adalah $x + 3y = 10$ dan $3x - y = 10$.

Alternatif 3 :
Misalkan gradien garis singgung tersebut adalah m. Maka persamaan garis singgung tersebut adalah
$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$
Karena $r^2 = 10$ maka $y = mx \pm \sqrt{10m^2 + 10}$
Karena garis tersebut melalui titik (4,2) maka
$$\sqrt{10m^2 + 10} = \pm(2 - 4m)$$
$10m^2 + 10 = 4 - 16m + 16m^2$
$(3m + 1)(m - 3) = 0$
Jika $m = -\frac{1}{3}$ maka garis singgung tersebut memiliki persamaan $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 4)$.
Jika $m = 3$ maka garis singgung tersebut memiliki persamaan $y - 2 = 3(x - 4)$.
Jadi, persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (4,2) adalah $x + 3y = 10$ dan $3x - y = 10$.

LATIHAN 5.D

1. Persamaan lingkaran dengan titik pusat (4,3) dan jari-jari = 4 adalah ······
2. Persamaan lingkaran yang titik pusatnya terletak pada garis $y = x + 1$ dan menyinggung sumbu X di titik (5,0) adalah ·····
3. Suatu lingkaran berjari-jari 5, melalui titik (0,0) dan pusatnya pada garis $y = x + 1$ mempunyai persamaan ······
4. Diketahui titik A(−2,1) , B(4,−3) dan P(x,y) terletak sedemikian sehingga $(PA)^2 + (PB)^2 = (AB)^2$. Maka P merupakan titik-titik yang terletak pada busur lingkaran yang memotong sumbu X pada koordinat ········
5. Persamaan garis singgung di titik (7,−1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 50$ adalah ·····
6. Garis lurus $3x + 4y + k = 0$ akan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ jika k bernilai ·······
7. Jari-jari lingkaran yang menyinggung sumbu x di (6,0) dan menyinggung garis $y = \sqrt{3}\,x$ adalah ····
8. Persamaan garis singgung yang ditarik dari titik (7,−1) ke lingkaran $x^2 + y^2 = 40$ adalah ····
9. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang tegak lurus garis $4y = -3x + 80$ adalah
10. Jarak terjauh dari titik (−12,5) ke lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 100$ adalah ····
11. Bilangan real x dan y memenuhi $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$, maka nilai minimum dari $x^2 + y^2$ adalah ······
12. (AHSME 1998) Kedua grafik $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$ dan $x^2 + y^2 = k + 4x + 12y$ memiliki titik potong jika k memenuhi $a \le k \le b$. Nilai dari $b - a$ adalah ·····
13. (AHSME 1996) Diberikan persamaan $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$. Nilai terkecil dari $3x + 4y$ yang memenuhi adalah ·····

E. Persamaan Nilai mutlak

Nilai mutlak dari x ditulis dengan $|x|$ dan memiliki pengertian $|x| = x$ jika $x \ge 0$ dan $|x| = -x$ jika $x < 0$. Jika hanya memuat satu tanda mutlak maka penyelesaian persamaan dapat dengan menggunakan pengertian nilai mutlak atau dapat juga dengan mengkuadratkan tanda mutlak.

Contoh 73 :
Selesaikan persamaan $|x - 2| = 8$

Solusi :
Alternatif 1 :
Dari pengertian didapat jika $x \ge 2$ maka $x - 2 = 8$ sehingga $x = 10$ yang memenuhi persamaan. Sedangkan jika $x < 2$ maka $2 - x = 8$ sehingga $x = -6$ yang juga memenuhi persamaan.
Jadi, penyelesaian x yang memenuhi adalah $x = -6$ atau $x = 10$.

Alternatif 2 :
Karena $|x - 2|$ bernilai tak negatif maka penyelesaiannya dapat dilakukan dengan mengkuadratkan kedua ruas.
$(x - 2)^2 = 64$
$x^2 - 4x - 60 = 0$
$(x - 10)(x + 6) = 0$
$x = 10$ atau $x = -6$

Persoalan menjadi lebih rumit apabila dalam persamaan tersebut memuat lebih dari satu tanda mutlak. Penyelesaiannya dapat dilakukan dengan membagi kasus.

Contoh 74 :
(OSP 2003) Apakah himpunan jawab dari persamaan
$|x + 2| + |3x| = 14$

Solusi :

- Untuk $x \le -2$, maka $|x + 2| = -x - 2$ dan $|3x| = -3x$
  $|x + 2| + |3x| = 14$. Maka $-x - 2 - 3x = 14$ sehingga $x = -4$ (memenuhi bahwa $x \le -2$)
- Untuk $-2 \le x \le 0$ maka $|x + 2| = x + 2$ dan $|3x| = -3x$
  $|x + 2| + |3x| = 14$. Maka $x + 2 - 3x = 14$ sehingga $x = -6$ (tidak memenuhi bahwa $-2 \le x \le 0$)
- Untuk $x \ge 0$ maka $|x + 2| = x + 2$ dan $|3x| = 3x$
  $|x + 2| + |3x| = 14$. Maka $x + 2 + 3x = 14$ sehingga $x = 3$ (memenuhi bahwa $x \ge 0$)

Jadi, himpunan jawab dari persamaan $|x + 2| + |3x| = 14$ adalah $\{ -4, 3\}$

LATIHAN 5.E :

1. (OSK 2005) Tentukan semua solusi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$.

2. (AIME 1983) Tentukan nilai minimum dari $|x - p| + |x - 15| + |x - p - 15|$ untuk suatu nilai x dalam batas $p \le x \le 15$ dimana $0 < p < 15$.

3. Banyaknya bilangan bulat berbeda y yang memenuhi $|x - 7| - |x + 11| = y$ adalah ····

4. (OSP 2006) Diberikan fungsi $f(x) = ||x - 2| - a| - 3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka a = ····

5. (OSP 2006) Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka $x + y$ = ······

6. (AHSME 1997) Ada berapa banyak tripel bilangan bulat (a,b,c) yang memenuhi
   $$|a + b| + c = 19 \quad \text{dan} \quad ab + |c| = 97$$

7. (AHSME 1977) Untuk a, b, c bilangan real taknol, semua kemungkinan nilai dari
   $$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$$
   adalah ·····

8. (AHSME 1999) Grafik $y = -|x - a| + b$ dan $y = |x - c| + d$ berpotongan di titik (2,5) dan (8,3). Nilai a + c adalah ········

9. (OSN 2011 SMP/MTs) Jika x dan y adalah bilangan bulat, tentukan banyak pasangan (x, y) yang memenuhi $|x| + |y| \le 50$.

10. (AIME 1988) x_i adalah bilangan real yang memenuhi $-1 < x_i < 1$ dan $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$. Tentukan nilai terkecil n yang memenuhi.

11. (AIME 2001) Fungsi f(x) memenuhi persamaan f(3x) = 3f(x) untuk semua bilangan real x dan $f(x) = 1 - |x - 2|$ untuk $1 \le x \le 3$. Tentukan bilangan positif x terkecil yang memenuhi f(x) = f(2001).

6. SISTEM PERSAMAAN

Sistem persamaan terdiri dari lebih dari satu persamaan dalam rangka mencari suatu penyelesaian.

A. Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan umum yang dikenal adalah sistem persamaan linier, yaitu sistem persamaan yang pangkat variabelnya tidak lebih dari satu. Untuk menyelesaikan n buah variabel dibutuhkan n buah persamaan. Penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan dengan menggunakan subtitusi, eliminasi maupun dengan memanfaatkan matriks.

Contoh 75 :

Harga x yang memenuhi : $3^{x+y} = 29$ dan $x - y = 1$ adalah ⋯

Solusi :

$3^{x+y} = 29$ dan $x - y = 1$

$x + y = {}^3\log 29$ ………………… (1)

$x - y = 1$ ………………… (2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$x = \frac{{}^3\log 29 + 1}{2}$ dan $y = \frac{{}^3\log 29 - 1}{2}$

Contoh 76 :

(OSK 2003) Hari ini usiaku $\frac{1}{3}$ kali usia ayahku. Lima tahun yang lalu, usiaku $\frac{1}{4}$ kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang ?

Solusi :

Misal usiaku saat ini = X dan usia ayahku saat ini = Y, maka :

$X = \frac{1}{3}Y$

$X - 5 = \frac{1}{4}(Y - 5)$

$X - 5 = \frac{1}{4}(3X - 5)$

$4X - 20 = 3X - 5$

$X = 15$

Jadi, usiaku saat ini 15 tahun

Contoh 77 :

Selesaikan sistem persamaan

$a + b + c + d = 0$

$a + b + c + e = 5$

$a + b + d + e = 1$

$a + c + d + e = 2$

$b + c + d + e = 4$

Solusi :

Jumlahkan semua persamaan di atas didapat

$4(a + b + c + d + e) = 12$

$a + b + c + d + e = 3$

Maka $0 + e = 3$ sehingga $e = 3$

$5 + d = 3$ sehingga $d = -2$

$1 + c = 3$ sehingga $c = 2$

$2 + b = 3$ sehingga $b = 1$

$4 + a = 3$ sehingga $a = -1$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah $(a, b, c, d, e) = (-1, 1, 2, -2, 3)$

Contoh 78 :
Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (0, 0), (6, 8) dan (7,7)

Solusi :
Persamaan umum lingkaran adalah
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
Karena ada 3 titik yang diketahui dan ada 3 variabel yang dicari yaitu A, B dan C maka soal ini merupakan sistem persamaan linier dengan 3 variabel (peubah).
Subtitusikan titik (0,0) ke persamaan lingkaran didapat
$C = 0$
Maka persamaan umum lingkaran menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$
Berdasarkan titik (6, 8) maka $6A + 8B = -100$
$3A + 4B = -50$ .... (1)
Berdasarkan titik (7, 7) maka $7A + 7B = -98$ .... (2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat $A = -6$ dan $B = -8$
Maka persamaan umum lingkaran tersebut adalah $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

B. Sistem Persamaan Tak Linier

Dalam sistem persamaan tak linier pangkat variabel bisa lebih dari satu atau merupakan perkalian di antara variabel-variabel yang ada. Dalam sistem persamaan tak linier maka persoalan menjadi lebih sulit dan membutuhkan teknik penyelesaian yang lebih tinggi.

Contoh 79 :
Ditentukan 3 buah persamaan dengan $x, y, z > 0$
$(x - 1)(y - 2) = 12$
$(y - 2)(z - 3) = 20$
$(z - 3)(x - 1) = 15$
Tentukan nilai $3x + 2y + 3z$.

Solusi :
Kalikan ketiga persamaan didapat
$((x - 1)(y - 2)(z - 3))^2 = 12 \cdot 20 \cdot 15 = (60)^2$
$(x - 1)(y - 2)(z - 3) = 60$ atau $(x - 1)(y - 2)(z - 3) = -60$
Niai $x, y, z > 0$ yang memenuhi adalah jika $z - 3 = 5$, $x - 1 = 3$ dan $y - 2 = 4$
Didapat $x = 4$, $y = 6$ dan $z = 8$
Jadi, $3x + 2y + 3z = 48$.

Jika persamaan-persamaan dalam sistem persamaan tak linier dapat dibawa ke dalam persamaan-persamaan sebagaimana telah dijelaskan pada rumus Vieta maka hubungan suku banyak dengan akar-akarnya dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan sistem persamaan tak linier.

Contoh 80 :
Tentukan nilai a, b dan c yang memenuhi sistem persamaan berikut :
$a + b + c = 9$
$ab + ac + bc = 26$
$abc = 24$

Solusi :
Sesuai dengan rumus Vieta maka a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
Dengan teorema horner didapat
$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$
Tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (2, 3, 4) dan permutasinya.

Contoh 81 :
(AIME 1991) m, n adalah bilangan asli yang memenuhi $mn + m + n = 71$ dan $m^2n + mn^2 = 880$, tentukan $m^2 + n^2$.

Solusi :
$mn + m + n = 71$
$m^2n + mn^2 = 880$ sehingga $mn(m + n) = 880$
$mn + \frac{880}{mn} = 71$
$(mn)^2 - 71(mn) + 880 = 0$
$(mn - 16)(mn - 55) = 0$
$mn = 16$ atau $mn = 55$

- Jika $mn = 16$ maka $m + n = 71 - 16 = 55$
  Nilai (m, n) yang memenuhi $mn = 16$ adalah (1, 16), (2, 8), (4, 4), (8, 2) dan (16, 1) tetapi tidak ada yang memenuhi $m + n = 55$.
- Jika $mn = 55$ maka $m + n = 71 - 55 = 16$
  Nilai (m, n) yang memenuhi $mn = 55$ adalah (1, 55), (5, 11), (11, 5), (55, 1).
  Yang memenuhi $m + n = 16$ adalah $m = 5$ dan $n = 11$ atau $m = 11$ dan $n = 5$
  $m^2 + n^2 = 5^2 + 11^2 = 146$

Jadi, nilai dari $m^2 + n^2$ sama dengan 146.

Contoh 82 :
Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan
$ab = 1$; $bc = 2$; $cd = 3$; $de = 4$ dan $ea = 6$

Solusi :
Kalikan kelima persamaan didapat
$(abcde)^2 = 2^4 \cdot 3^2$
$abcde = 12$ atau $abcde = -12$

- Jika $abcde = 12$
  Mengingat $ab = 1$ dan $cd = 3$ maka $e = 4$ sehingga $d = 1$ dan $a = \frac{3}{2}$.
  Maka $b = \frac{2}{3}$ dan $c = 3$.
  Jadi, $(a, b, c, d, e) = (\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, 1, 4)$ merupakan penyelesaian.
- Jika $abcde = -12$
  Mengingat $ab = 1$ dan $cd = 3$ maka $e = -4$ sehingga $d = -1$ dan $a = -\frac{3}{2}$.
  Maka $b = -\frac{2}{3}$ dan $c = -3$.
  Jadi, $(a, b, c, d, e) = (-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -3, -1, -4)$ merupakan penyelesaian.

Jadi, penyelesaian (a, b, c, d, e) adalah $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, 1, 4)$ dan $(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -3, -1, -4)$.

Contoh 83 :
Selesaikan sistem persamaan :
$x^2 - yz = 3$
$y^2 - xz = 4$
$z^2 - xy = 5$

Solusi :
Alternatif 1 :
$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 12$

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 24$
$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2xz + z^2) + (y^2 - 2yz + z^2) = 24$
$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 24$ ………… (1)
$y^2 - xz - (x^2 - yz) = 1$
$(y + x)(y - x) + z(y - x) = 1$
$(y - x)(x + y + z) = 1$ ………………………… (2)
$z^2 - xy - (y^2 - xz) = 1$
$(z + y)(z - y) + x(z - y) = 1$
$(z - y)(x + y + z) = 1$ ………………………… (3)
$z^2 - xy - (x^2 - yz) = 2$
$(z + x)(z - x) + y(z - x) = 2$
$(z - x)(x + y + z) = 2$ ………………………… (4)
Subtitusikan persamaan (2), (3) dan (4) ke persamaan (1)
$\left(\frac{1}{x+y+z}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+y+z}\right)^2 + \left(\frac{2}{x+y+z}\right)^2 = 24$
$(x + y + z)^2 = \frac{1}{4}$

- Jika $x + y + z = \frac{1}{2}$
  Dari persamaan (2), (3) dan (4)
  $y - x = 2$
  $z - y = 2$
  $z - x = 4$
  $x + (2 + x) + z = \frac{1}{2}$
  $2x + z = -\frac{3}{2}$
  $2x + (4 + x) = -\frac{3}{2}$ sehingga $x = -\frac{11}{6}$
  $y = 2 + (-\frac{11}{6}) = \frac{1}{6}$
  $z = 4 + (-\frac{11}{6}) = \frac{13}{6}$
- Jika $x + y + z = -\frac{1}{2}$
  $y - x = -2$
  $z - y = -2$
  $z - x = -4$
  $x + (-2 + x) + z = -\frac{1}{2}$
  $2x + z = \frac{3}{2}$
  $2x + (-4 + x) = \frac{3}{2}$ sehingga $x = \frac{11}{6}$
  $y = -2 + (\frac{11}{6}) = \frac{1}{6}$
  $z = -4 + (\frac{11}{6}) = \frac{13}{6}$

Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah $((-\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{13}{6})(\frac{11}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}))$

Alternatif 2 :
$x^2 - yz + z^2 - xy = 2y^2 - 2xz$
$(x - y)(x + y) + (z - y)(z + y) + z(x - y) + x(z - y) = 0$
$(x + y + z)(x + z - 2y) = 0$
* Jika $x + y + z = 0$
  Subtitusikan ke persamaan pada soal didapat
  $x^2 - y(-x - y) = 3$
  $x^2 + y^2 + xy = 3$ ……………… (5)
  $(-x - y)^2 - xy = 5$

$x^2 + y^2 + xy = 5$ .... (6)
Maka tidak ada tripel (x, y, z) yang memenuhi.

* Jika $x + z = 2y$ .... (7)
$x^2 - y(2y - x) = 3$
$x^2 - 2y^2 + xy = 3$ .... (8)
$y^2 - x(2y - x) = 4$
$x^2 + y^2 - 2xy = 4$ .... (9)
$4(x^2 - 2y^2 + xy) = 3(x^2 + y^2 - 2xy)$
$x^2 - 11y^2 + 10xy = 0$
$(x + 11y)(x - y) = 0$
  - Jika $x = y$
    Subtitusikan ke persamaan (7) maka
    $x = y$ sehingga $x = y = z$ yang tidak memenuhi $x^2 - yz = 3$
  - Jika $x = -11y$
    Subtitusikan ke persamaan (7) maka
    $z = 13y$
    $y^2 - xz = 4$
    $y^2 + 143y^2 = 4$
    $144y^2 = 4$
    $y = \pm\frac{1}{6}$
    * Jika $y = \frac{1}{6}$
      Maka $x = -\frac{11}{6}$ dan $z = \frac{13}{6}$
    * Jika $y = -\frac{1}{6}$
      Maka $x = \frac{11}{6}$ dan $z = -\frac{13}{6}$

Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah $((-\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{13}{6})(\frac{11}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{13}{6}))$

LATIHAN 6 :

1. Lingkaran yang melalui titik-titik (2,2), (2,–4) dan (5,–1) mempunyai jari-jari ......

2. Tentukan semua nilai x + y real yang memenuhi sistem persamaan :
$$x + y + \frac{x}{y} = 232 \text{ dan } \frac{x(x+y)}{y} = 2007$$

3. Tentukan semua penyelesaian pasangan (x, y) real yang memenuhi
$x^2 + y^2 + x + y = 12$
$xy + x + y = 3$

4. (OSP 2011) Tentukan semua nilai k yang mungkin sehingga tidak ada pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x - k)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

5. (OSK 2005) Diberikan tiga bilangan positif x, y dan z yang semuanya berbeda. Jika $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$, maka nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan

6. (Canadian MO 1969) Tunjukkan bahwa jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ dan p_1, p_2 dan p_3 semuanya tidak sama dengan nol, maka :

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + p_3 a_3^n}{p_1 b_1^n + p_2 b_2^n + p_3 b_3^n}$$

7. (AIME 1989/OSN 2004) Diberikan
$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$
$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$
$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$.
Tentukan nilai dari $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$.

8. (Irish MO 1999) Selesaikan sistem persamaan berikut :
$y^2 = (x + 8)(x^2 + 2)$
$y^2 - (8 + 4x)y + (16 + 16x - 5x^2) = 0$

9. (Canadian MO 1970) Tentukan semua tripel (x, y, z) yang memenuhi bahwa salah satu bilangan jika ditambahkan dengan hasil kali kedua bilangan yang lain hasilnya adalah 2.

10. Misalkan (a, b, c) adalah solusi real untuk sistem persamaan
$x^3 - xyz = 2$
$y^3 - xyz = 6$
$z^3 - xyz = 20$
Nilai terbesar $a^3 + b^3 + c^3$ dapat ditulis ke dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n adalah bilangan bulat positif yang saling relatif prima. Nilai dari m + n adalah ⋯⋯

11. (COMC 1997) Tentukan bilangan real x, y dan z yang memenuhi sistem persamaan :

$$x - \sqrt{yz} = 42$$
$$y - \sqrt{xz} = 6$$
$$z - \sqrt{xy} = -30$$

12. (Vietnamese MO 1996) Selesaikan sistem persamaan berikut :

$$\sqrt{3x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2$$
$$\sqrt{7y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2}$$

7. KETAKSAMAAN

A. Konsep Urutan dan Sifat-sifat dasar dari konsep urutan

Sifat penting pada bilangan-bilangan real adalah adanya urutan sehingga dapat membandingkan dua bilangan sehingga didapat apakah kedua bilangan tersebut sama atau tidak sama.

Sifat-sifat dari dari konsep urutan pada sistem bilangan real :

(1) Setiap bilangan real a hanya memenuhi satu dan hanya satu dari kemungkinan
(i) $a = 0$
(ii) $a > 0$
(iii) $a < 0$

(2) Setiap bilangan real a dan b hanya memenuhi satu dan hanya satu dari kemungkinan
(i) $a = b$
(ii) $a > b$
(iii) $a < b$

(3) Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $a + b > 0$
(4) Jika $a > 0$ dan $b > 0$ atau $a < 0$ dan $b < 0$ maka $ab > 0$
(5) Jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$
(6) Jika $a < b$ maka $a \pm c < b \pm c$ untuk setiap bilangan real c
(7) Jika $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$
(8) Jika $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$
(9) Jika $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$
(10) Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$
(11) Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $\frac{a}{b} > 0$
(12) Jika $0 < a < b$ atau $a < b < 0$ maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
(13) Jika $a > 0$ dan $b > 0$ serta $a^2 > b^2$ maka $a > b$.

Sifat-sifat tersebut juga berlaku jika tanda < diganti dengan tanda ≤ kecuali untuk sifat (12) yang mensyaratkan bahwa a dan b keduanya tak nol.

Contoh 84 :

Buktikan bahwa jika a, b, c dan d adalah bilangan positif yang memenuhi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Solusi :

Alternatif 1 :

Karena bd positif serta $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka

$ad < bc$ .... (sifat 8)

$ad + ab < bc + ab$ .... (sifat 6)

$a(b + d) < b(a + c)$

Karena $b(b + d)$ positif maka

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ .... (sifat 8) .... (1)

Karena bd positif serta $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka

$ad < bc$ .... (sifat 8)

$ad + cd < bc + cd$ .... (sifat 6)

$d(a + c) < c(b + d)$

Karena $d(b + d)$ positif maka

$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .... (sifat 8) .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (terbukti)

Alternatif 2 :

Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka bc > ad

$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)}$

Karena bc > ad sedangkan b dan (b + d) positif maka

$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$

Jadi, $\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$ .... (3)

$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)}$

Karena bc > ad sedangkan d dan (b + d) positif maka

$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0$

Jadi, $\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) didapat

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (terbukti)

Contoh 85 :

Jika a ≥ b dan x ≤ y maka buktikan bahwa $\frac{ax+by}{2} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$

Solusi :

$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2} - \frac{ax+by}{2} = \frac{ax+ay+bx+by-2ax-2by}{4} = \frac{(a-b)(y-x)}{4}$

Karena a ≥ b dan x≤ y maka (a − b)(y − x) ≥ 0.

Jadi, $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2} - \frac{ax+by}{2} \geq 0$. Tanda kesamaan terjadi jika a = b atau x = y.

Terbukti bahwa $\frac{ax+by}{2} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$.

Contoh 86 :

Jika $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+2} < 2$, maka batas-batas nilai x yang memenuhi adalah ⋅⋅⋅

Solusi :

Ketaksamaan pada soal memiliki syarat bahwa bilangan dalam tanda akar tidak boleh negatif sehingga

x ≥ −10 dan x ≥ −2 yang berakibat syarat pada soal adalah x ≥ −2 .... (1)

$\sqrt{x+10} < 2 + \sqrt{x+2}$

Akar dari suatu bilangan selalu positif sehingga jika dikuadratkan tidak akan mempengaruhi tanda ketaksamaan.

$x + 10 < 4 + x + 2 + 4\sqrt{x+2}$

$1 < \sqrt{x+2}$

1 < x + 2

x > −1 .... (2)

Jadi, batas-batas nilai x yang memenuhi adalah x > −1.

B. Kuadrat Sebarang Bilangan Real Selalu Tak Negatif

Sebagaimana kita ketahui bahwa kuadrat dari suatu bilangan real tidak mungkin negatif. Konsep ini penting untuk menyelesaikan suatu persoalan.

Jika a sebarang bilangan real maka $a^2 \geq 0$. Tanda kesamaan terjadi hanya jika a = 0.

Contoh 87 :
Buktikan bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk bilangan real a dan b. Kapan tanda kesamaan terjadi ?

Solusi :
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka
$(a - b)^2 \geq 0$
Tanda kesamaan terjadi jika a = b
$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$
$a^2 + b^2 \geq 2ab$ (terbukti)

Contoh 88 :
Diketahui a, b, c > 0 serta a + b + c = 2. Buktikan bahwa ab + bc tidak lebih dari 1.

Solusi :
ab + bc = b(a + c) = b(2 − b)
$ab + bc = 1 - (b - 1)^2$
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka $ab + bc \leq 1$ dengan tanda kesamaan terjadi jika b = 1.
Jadi, terbukti bahwa ab + bc tidak lebih dari 1.

Sifat bilangan kuadrat tidak mungkin negatif tidak hanya digunakan untuk menyelesaikan masalah pertidaksamaan tetapi juga menyangkut persamaan.

Contoh 89 :
(AHSME 1997) Jika x, y dan z adalah bilangan real yang memenuhi $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 0$ maka nilai dari x + y + z adalah

Solusi :
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka penyelesaian $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 0$ hanya didapat jika x − 3 = 0, y − 4 = 0 dan z − 5 = 0.
Maka, penyelesaian (x, y, z) yang memenuhi adalah x = 3, y = 4 dan z = 5.
Jadi, nilai dari x + y + z = 3 + 4 + 5 = 12.

C. Ketaksamaan Rataan Kuadrat (QM), Rataan Aritmatik (AM), Rataan Geometri (GM) dan Rataan Harmonik (HM)

Perlu dijelaskan terlebih dahulu pengertian masing-masing rataan.
Misalkan $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ adalah bilangan real positif.

Rataan Kuadrat (QM) = $\sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$

Rataan Aritmatik (AM) = $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$

Rataan Geometri (GM) = $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$

Rataan Harmonik (HM) = $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$

Contoh 90 :
Hitunglah QM, AM, GM dan HM dari bilangan-bilangan 2, 3 dan 7.

Solusi :

QM = $\sqrt{\frac{2^2+3^2+7^2}{3}} = \sqrt{\frac{62}{3}}$

AM = $\frac{2+3+7}{3}$ = 4

GM = $\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 7} = \sqrt[3]{42}$

HM = $\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}$ = $\frac{126}{41}$

Hubungan antara QM, AM, GM dan HM adalah

$$QM \geq AM \geq GM \geq HM$$

Tanda kesamaan terjadi jika $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$

Contoh 91 :
Buktikan bahwa $a^2 + b^2 \geq 2ab$ untuk bilangan real positif a dan b.

Solusi :
Dengan memanfaatkan ketaksamaan AM-GM didapat

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$ = ab

Tanda kesamaan terjadi jika $a^2 = b^2$ sehingga a = b.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ (terbukti)

Contoh 92 :

Tentukan nilai minimal dari $\frac{x}{2y}+\frac{y}{4z}+\frac{z}{8x}$ dan kapan nilai terkecil itu terjadi ?

Solusi :
Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka

$\frac{x}{2y}+\frac{y}{4z}+\frac{z}{8x} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{2y}\cdot\frac{y}{4z}\cdot\frac{z}{8x}}$ = $\frac{3}{4}$

Jadi, nilai minimal dari $\frac{x}{2y}+\frac{y}{4z}+\frac{z}{8x}$ adalah $\frac{3}{4}$.

Tanda kesamaan terjadi jika $\frac{x}{2y}=\frac{y}{4z}=\frac{z}{8x}$.

Misalkan $\frac{x}{2y}=\frac{y}{4z}=\frac{z}{8x}$ = k maka

k^3 = $\frac{x}{2y}\cdot\frac{y}{4z}\cdot\frac{z}{8x}$ = $\frac{1}{64}$

k = $\frac{1}{4}$

Jadi, $\frac{x}{2y}$ = $\frac{1}{4}$ sehingga y = 2x

$\frac{z}{8x}$ = $\frac{1}{4}$ sehingga z = 2x

Jadi, tanda kesamaan terjadi jika y = z = 2x

Maka nilai minimal dari $\frac{x}{2y}+\frac{y}{4z}+\frac{z}{8x}$ adalah $\frac{3}{4}$ yang terjadi jika y = z = 2x.

Contoh 93 :
Untuk a, b dan c bilangan positif, buktikan ketaksamaan $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Solusi :
Berdasarkan ketaksamaan AM ≥ GM maka
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$
Dengan cara yang sama maka
$a + c \geq 2\sqrt{ac}$
$b + c \geq 2\sqrt{bc}$
Tanda kesamaan terjadi jika a= b = c.
$(a + b)(a + c)(b + c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac} \cdot 2\sqrt{bc}$
$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ (terbukti)

Contoh 94 :
Buktikan bahwa untuk x, y, z positif maka $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ dan kapan tanda kesamaan terjadi.

Solusi :
Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka
$x^2 + y^2 \geq 2xy$
$x^2 + z^2 \geq 2xz$
$y^2 + z^2 \geq 2yz$
Tanda kesamaan terjadi jika x = y = z
Jumlahkan ketiga persamaan didapat
$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$
$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$ (terbukti)

Contoh 95 :
(OSP 2009/AIME 1983) Tentukan nilai minimal dari $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ untuk $0 < x < \pi$.

Solusi :
$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x \sin x + \frac{4}{x \sin x}$
Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka
$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x \sin x + \frac{4}{x \sin x} \geq 2\sqrt{9x \sin x \cdot \frac{4}{x \sin x}} = 12$
Maka nilai minimum dari $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ sama dengan 12.

LATIHAN 7 :

1. (OSK 2010) Bilangan bulat yang memenuhi pertidaksamaan $x^4 \leq 8x^2 - 16$ sebanyak ·····
2. (OSP 2004) Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^2 < |2x - 8|$

3. (AIME 1987) Tentukan bilangan bulat terbesar n sehingga terdapat bilangan bulat unik k yang memenuhi $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$.

4. (India RMO 1995) Tunjukkan bahwa untuk sembarang bilangan real x maka
$$x^2 \sin x + x\cos x + x^2 + \tfrac{1}{2} > 0$$

5. (OSP 2009) Banyaknya bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$ adalah ⋯⋯

6. Selesaikan persamaan berikut dalam bilangan real
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + 2\sqrt{z-2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = x + y + z + u + v$$

7. (Baltic Way 2000) Tentukan semua bilangan real positif (x, y) yang memenuhi persamaan :
$$x + y - \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y} + 4 = 2\left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2y-1}\right)$$

8. Buktikan bahwa untuk bilangan real x maka
$$\tfrac{x^3-1}{3} \le \tfrac{x^4-1}{4}$$

9. (ME V2N4) Misalkan a, b dan c adalah bilangan positif yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Buktikan bahwa $(a - c)(b - c) \le 0$

10. (Irish MO 1998) Tunjukkan bahwa jika x bilangan real tak nol maka :
$$x^8 - x^5 - \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^4} \ge 0$$

11. (OSP 2008) Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari x + y adalah ⋯⋯

12. Tentukan nilai terkecil dari f(x) jika $f(x) = \frac{4x^2+8x+13}{6(1+x)}$ untuk $x \ge 0$. Tentukan juga x yang menyebabkan nilai minimum tersebut.

13. Buktikan bahwa $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \ge n^2$ untuk $a_i > 0$.

14. (OSP 2003) Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.

15. Jika a dan b adalah bilangan real positif maka buktikan bahwa
$$\tfrac{1}{a} + \tfrac{4}{b} \ge \tfrac{9}{a+b}$$
Kapan tanda kesamaan terjadi ?

16. (Austrian MO 2000 : Beginner Competition) Jika a dan b adalah bilangan real positif maka buktikan bahwa
$$\frac{(a+b)^3}{a^2 b} \ge \frac{27}{4}$$
Kapan tanda kesamaan terjadi ?

17. (Canadian MO 1971) Diketahui x dan y adalah bilangan real positif yang memenuhi x + y = 1. Buktikan bahwa

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \ge 9$$

18. (OSP 2009) Bilangan rasional a < b < c membentuk barisan hitung (aritmatika) dan

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} = 3$$

Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

19. x, y dan z adalah bilangan real yang memenuhi x + y + z = 1. Buktikan bahwa xy + yz + xz ≤ $\frac{1}{3}$.

20. Misalkan x, y dan z adalah bilangan positif berbeda. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} > \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}$$

21. (OSP 2011) Jika a ≥ b > 1, maka nilai terbesar yang mungkin untuk $^{a}\log (a/b) + {}^{b}\log (b/a)$ adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅

22. Misalkan x, y, dan z adalah bilangan real positif dengan sifat xyz = 1. Nilai terkecil dari

$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$$

tercapai saat x + y + z bernilai ⋅⋅⋅⋅

23. (Hongkong PSC 1988) Jika a + b + c + d + e = 8 dan $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$ maka tentukan nilai maksimal dari e.

24. Diberikan persamaan $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ yang mempunyai empat akar real positif. Buktikan bahwa :
    a) pr − 16s ≥ 0
    b) $q^2 - 36s \ge 0$

    dengan tanda kesamaan terjadi bila keempar akarnya sama.

25. Buktikan bahwa untuk a, b dan c bilangan real positif maka

$$\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{a+c}+\frac{2c}{a+b} \ge 3$$

Kapan tanda kesamaan terjadi ?

26. (Irish MO 1998) Tunjukkan bahwa jika a, b, c adalah bilangan real positif maka :
    (i) $\frac{9}{a+b+c} \le 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

    (ii) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

27. Buktikan bahwa untuk bilangan real positif a, b, dan c sebarang berlaku

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

8. STATISTIK SEDERHANA

Statistik yang dibahas dalam buku ini hanya bersifat sederhana yaitu berupa data tunggal. Hal yang dibahas adalah pengertian dari rata-rata (rataan), modus, median dan jangkauan.

Rata-rata atau disebut juga dengan mean atau dikenal juga dengan rataan aritmatika. Rata-rata diberi simbol $\overline{x}$ (dibaca x bar). Cara menghitung mean adalah membagi antara jumlah semua data dengan banyaknya data.

Modus adalah data yang paling sering muncul atau data dengan frekuensi paling banyak.

Median (diberi simbol Q_2) adalah nilai tengah dari gugusan data yang telah diurutkan dari nilai yang terendah sampai tertinggi. Jika banyaknya datanya ganjil maka median adalah data yang berada di tengah sedangkan jika banyaknya datanya genap maka median adalah rata-rata hitung dari dua data yang berada di tengah. Nilai tengah dari data-data yang berada di sebelah kanan median disebut juga kuartil atas (diberi simbol Q_3) sedangkan nilai tengah dari data-data yang berada di sebelah kiri median disebut juga kuartil bawah (diberi simbol Q_1).

Jangkauan adalah selisih nilai tertinggi dan terendah.

Contoh 96 :

Diberikan data : 1, 2, 6, 6, 8, 9, 10. Hitunglah mean, modus, median, kuartil atas, kuartil bawah dan jangkauan.

Solusi :

Mean = rataan = $\frac{1+2+6+6+8+9+10}{7}$ = 6.

Nilai yang paling banyak muncul adalah 6 yaitu muncul sebanyak 2 kali. Jadi, modus = 6.

Banyaknya data = 7. Jadi, median adalah nilai data ke-4. Median = 6.

Ada masing-masing 3 data disebelah kiri dan kanan median. Maka kuartil bawah = 2 dan kuartil atas = 9.

Jangkauan = 10 − 1 = 9

Contoh 97 :

Diberikan data : 1, 8, 4, 5, 6, 6, 5, 6, 3, 9. Hitunglah mean, modus, median, kuartil atas, kuartil bawah dan jangkauan.

Solusi :

Setelah datanya diurutkan didapat : 1, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 9.

Mean = rataan = $\frac{1+3+4+5+5+6+6+6+8+9}{10}$ = $\frac{53}{10}$.

Nilai yang paling banyak muncul adalah 6 yaitu muncul sebanyak 3 kali. Jadi, modus = 6.

Banyaknya data = 10. Jadi, median adalah rata-rata data ke-5 dan ke-6. Median = $\frac{5+6}{2}$ = $\frac{11}{2}$.

Ada masing-masing 5 data disebelah kiri dan kanan median. Maka kuartil bawah = 4 dan kuartil atas = 6.

Jangkauan = 9 − 1 = 8

Contoh 98 :

Sepuluh orang wanita mempunyai rata-rata tinggi badan 160 cm sedang 20 orang pria rata-rata tingginya 170 cm. Tinggi badan rata-rata ke-30 orang tersebut adalah ⋯⋯ cm.

Solusi :

Jumlah tinggi badan 10 wanita = 10 ⋅ 160 = 1600 cm. Jumlah tinggi badan 20 pria = 20 ⋅ 170 = 3400 cm.

Tinggi badan rata-rata 30 orang tersebut = $\frac{1600+3400}{30}$ = $\frac{500}{3}$ cm.

Contoh 99 :
(OSK 2004) Di suatu hotel, rata-rata 96% kamar terpakai sepanjang sebulan liburan kenaikan kelas dan rata-rata 72% kamar terpakai sepanjang sebelas bulan lainnya. Maka rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah

Solusi :
Rata-rata % pemakaian kamar setahun = $\frac{1 \cdot 96\% + 11 \cdot 72\%}{1+11}$ = 74 %
Jadi, Rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah 74 %.

LATIHAN 8

1. Suatu keluarga mempunyai lima orang anak. Anak termuda berumur X tahun dan yang tertua 2X tahun. Tiga anak yang lain berturut-turut berumur X + 2, X + 4 dan 2X − 3. Bila rata-rata hitung umur mereka adalah 16 tahun, maka anak termuda berumur ⋯⋯ tahun.

2. Kumpulan data : 1, 3, 5, 7, 2, 4, 5, 8, x, 1, −1, 2, 3. Jika data tersebut memiliki jangkauan sama dengan 10, maka nilai x adalah ⋯⋯⋯

3. Rataan dari a − 2, b + 3 dan c + 5 adalah 6. Rataan dari a + 4, b + 6 dan c − 1 adalah ⋅⋅⋅⋅

4. Umur rata-rata dari suatu kelompok yang terdiri dari dokter dan jaksa adalah 40 tahun. Jika umur rata-rata para dokter adalah 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa adalah 50 tahun, maka perbandingan banyaknya dokter dan banyaknya jaksa adalah ⋯⋯

5. (OSP 2003) Agung mendapatkan bahwa nilai rata-rata dari tiga ulangan matematika yang diikutinya adalah 81. Nilai ulangan pertama adalah 85. Nilai ulangan ketiga lebih rendah 4 dari nilai ulangan kedua. Berapakah nilai ulangan kedua Agung ?

6. Nilai rata-rata ujian sekelompok siswa yang berjumlah 40 orang adalah 51. Jika seorang siswa dari kelompok ini yang mendapat nilai 90 tidak dimasukkan dalam perhitungan rata-rata tersebut, maka nilai rata-rata ujian akan menjadi ⋯⋯⋯

7. (OSP 2008) Seratus siswa suatu Provinsi di Pulau Jawa mengikuti seleksi tingkat Provinsi dan skor rata-ratanya adalah 100. Banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi tersebut 50% lebih banyak dari siswa kelas III, dan skor rata-rata siswa kelas III 50% lebih tinggi dari skor rata-rata siswa kelas II. Skor rata-rata siswa kelas III adalah ⋯⋯

8. (OSP 2005) Misalkan A dan B dua himpunan, masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B adalah 5002. Jika $A \cap B = \{2005\}$, tentukan unsur terbesar yang mungkin dari himpunan $A \cup B$.

9. Terdapat 8 buah data yang semuanya adalah bilangan bulat dan setelah diurutkan dari terendah ke tertinggi adalah a, b, c, d, e, f, g, dan h. Median dari data tersebut = 6,5 dan kuartil atas = 7. Jika modus = 3 dan 7 serta a, d dan h membentuk barisan aritmatika maka rata-rata seluruh data tersebut sama dengan ⋯⋯

10. (OSP 2007) Bilangan-bilangan asli 1, 2, ⋅⋅⋅, n dituliskan di papan tulis, kemudian salah satu bilangan dihapus. Rata-rata aritmatika bilangan yang tertinggal adalah . Bilangan n yang memungkinkan ini terjadi adalah ⋯⋯

BAB II
TEORI BILANGAN

1. SIFAT-SIFAT PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN DUA BILANGAN

Sifat-sifat dalam penjumlahan dua bilangan adalah :

1. Bilangan Ganjil ± Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
2. Bilangan Ganjil ± Bilangan Genap = Bilangan Ganjil
3. Bilangan Genap ± Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
4. Bilangan Genap ± Bilangan Genap = Bilangan Genap

Sifat-sifat dalam perkalian dua bilangan adalah :

1. Bilangan Ganjil x Bilangan Ganjil = Bilangan Ganjil
2. Bilangan Ganjil x Bilangan Genap = Bilangan Genap
3. Bilangan Genap x Bilangan Ganjil = Bilangan Genap
4. Bilangan Genap x Bilangan Genap = Bilangan Genap

Dari sifat-sifat perkalian dua bilangan akan didapat bahwa bilangan genap tidak mungkin membagi bilangan ganjil sedangkan bilangan ganjil mungkin membagi bilangan genap. Keterbagian akan dibahas lebih lanjut dalam sub bab selanjutnya.

Contoh 1 :
(OSK 2003 SMP/MTs) Hasil kali suatu bilangan genap dengan suatu bilangan ganjil adalah 820. Bilangan ganjil terbesar yang memenuhi syarat tersebut adalah ⋅⋅⋅⋅⋅

Solusi :
$820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$
Perkalian dua bilangan yang menghasilkan bilangan ganjil hanya didapat jika kedua bilangan tersebut adalah ganjil.
Faktor ganjil dari 820 selain 1 adalah 5 dan 41.
Bilangan ganjil terbesar yang memenuhi adalah $5 \cdot 41 = 205$.
Jadi, bilangan ganjil terbesar yang memenuhi adalah 205.

LATIHAN 1 :

1. Diketahui $a + p{\cdot}b = 19452005$ dengan a dan b masing-masing adalah bilangan ganjil serta diketahui bahwa $1945 \le p \le 2005$. Banyaknya nilai p bulat yang memenuhi persamaan tersebut adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅
2. p dan q adalah bilangan prima dan p > q. Jika p + q = 2005, maka berapakah p − q ?
3. (OSP 2011) Jika kedua akar persamaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅
4. Tentukan bilangan prima terkecil yang membagi $19^{2004} + 45^{2005}$.
5. Diketahui persamaan a = 1 + b + c + d serta c − d = 6 dengan a, b, c, d semuanya bilangan prima dan a < 100. Tentukan nilai a maksimum yang memenuhi.

6. (Canadian MO 1971) Diberikan polinomial $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ dengan koefisien a_1, a_2, $\cdots$, a_n semuanya bilangan bulat. Jika p(0) dan p(1) keduanya bilangan ganjil, tunjukkan bahwa p(x) tidak mempunyai akar bilangan bulat.

7. Diketahui (bd + cd) adalah bilangan ganjil. Tunjukkan bahwa polinomial $x^3 + bx^2 + cx + d$ tidak dapat diubah menjadi $(x + r)(x^2 + px + q)$ dengan b, c, d, p, q dan r semuanya bilangan bulat.

8. Jika a, b dan c adalah bilangan ganjil, buktikan bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak dapat merupakan bilangan rasional.

2. SIFAT-SIFAT KETERBAGIAN

Definisi : Sebuah bilangan bulat a dikatakan membagi b (ditulis $a \mid b$) jika terdapat bilangan bulat k sehingga $b = a \cdot k$. Beberapa hal berkaitan dengan pembagian adalah sebagai berikut :

1.1 Misalkan a, b, c, x dan y bilangan bulat, maka sifat-sifat di bawah ini berlaku :
- (1) $a \mid a$ (semua bilangan bulat membagi dirinya sendiri)
- (2) $a \mid 0$ (semua bilangan bulat membagi 0)
- (3) $1 \mid a$ (satu membagi semua bilangan bulat)
- (4) Jika $a \mid 1$ maka $a = \pm 1$
- (5) Jika $a \mid b$ maka $a \mid xb$
- (6) Jika $ab \mid c$ maka $a \mid c$ dan $b \mid c$
- (7) Jika $a \mid b$ dan $b \mid c$ maka $a \mid c$
- (8) Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a \mid (bx + cy)$
- (9) Jika $a \mid b$ maka $xa \mid xb$
- (10) Jika $a \mid b$ dan $b \neq 0$ maka $|a| \leq |b|$
- (11) Jika $a \mid b$ dan $b \mid a$ maka $a = \pm b$
- (12) Jika $a \mid bc$ dan FPB(a, b) = 1 maka $a \mid c$
- (13) $0 \mid a$ hanya jika $a = 0$

1.2 Jika suatu bilangan habis dibagi a dan juga habis dibagi b, maka bilangan tersebut akan habis dibagi ab dengan syarat a dan b relatif prima. Berlaku sebaliknya.
Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) dua bilangan tersebut sama dengan 1.
Contoh : 36 habis dibagi 4 dan 3, maka 36 akan habis dibagi 12.
45 habis dibagi 15. Maka 45 juga habis dibagi 3 dan 45 juga habis dibagi 5.
12 habis dibagi 4 dan 12 juga habis dibagi 6 tetapi 12 tidak habis dibagi $4 \cdot 6 = 24$ sebab 4 dan 6 tidak relatif prima, FPB (4, 6) = 2

1.3 Bilangan yang dapat diubah menjadi perkalian n bilangan bulat berurutan akan habis dibagi n! dengan tanda "!" menyatakan faktorial. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.
Contoh : 3x4x5x6 = 360 merupakan perkalian 4 bilangan bulat berurutan maka habis dibagi 4! = 24.

1.4 Mengingat penjabaran pada dua persamaan berikut :
(i) $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan asli
(ii) $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ dengan $n \in$ bilangan ganjil
Maka $(a - b)$ membagi $(a^n - b^n)$ untuk semua a, b bulat dan n bilangan asli
$(a + b)$ membagi $(a^n + b^n)$ untuk semua a, b bulat dan n bilangan ganjil

Contoh 2 :
(OSN 2003 SMP/MTs) Buktikan bahwa $(n - 1)n(n^3 + 1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6 untuk semua bilangan asli n.

Solusi :
Alternatif 1 :
Berdasarkan 1.2 didapat bahwa jika $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 6 maka $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis akan dibagi 2 dan juga habis dibagi 3. Jadi, jika dapat dibuktikan bahwa $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 2 dan juga habis dibagi 3 maka dapat dibuktikan $(n - 1)n(n^3 + 1)$ senantiasa habis dibagi oleh 6 untuk semua bilangan asli n.
$(n - 1)$ dan n adalah 2 bilangan bulat berurutan maka $(n - 1)n$ akan habis dibagi 2.
Berdasarkan 2.1 poin (1) maka $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 2.
Sebuah bilangan bulat dapat diklasifikasikan ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2.
Jika n = 3k maka 3 membagi n sehingga $3 \mid (n - 1)n(n^3 + 1)$
Jika n = 3k + 1 maka $3 \mid (n - 1)$ sehingga $3 \mid (n - 1)n(n^3 + 1)$.
Jika n = 3k + 2 maka $n^3 + 1 = (3k + 2)^3 + 1 = 3(9k^3 + 18k^2 + 12k + 3)$ sehingga $3 \mid (n^3 + 1)$.
Maka $3 \mid (n - 1)n(n^3 + 1)$.

Didapat bahwa $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 2 dan juga habis dibagi 3. Karena 2 dan 3 relatif prima maka $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$.
Jadi, $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 6.

Alternatif 2 :
$(n - 1)n(n^3 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)$
Karena n − 1, n dan n tiga bilangan asli berurutan maka $(n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)$ habis dibagi oleh 3!= 6.
Jadi, $(n - 1)n(n^3 + 1)$ habis dibagi 6.

Contoh 3 :
(OSK 2005 SMP/MTS) Bilangan 43 dapat dinyatakan ke dalam bentuk 5a + 11b karena untuk a = 13 dan b = −2, nilai dari 5a + 11b adalah 43. Manakah dari tiga bilangan 37, 254 dan 1986 yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk 5a + 11b ?
A. 1983 B. 254 C. 254 dan 1986 D. semua E. tak ada

Solusi :
Perhatikan bahwa 1 dapat dinyatakan ke dalam bentuk 5a + 11b dengan a = −2 dan b = 1. Karena 1 membagi semua bilangan bulat maka semua bilangan dapat dinyatakan ke dalam bentuk 5a + 11b. (Jawaban : D)
Misalkan diinginkan 5a + 11b = k maka kesamaan akan terjadi saat a = −2k dan b = k.

Contoh 4 :
Buktikan bahwa 7, 13 dan 181 adalah faktor dari $3^{105} + 4^{105}$

Solusi :
Karena 105 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 3 + 4 = 7.
$3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35} = 27^{35} + 64^{35}$
Karena 35 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 27 + 64 = 91.
Karena $91 = 7 \cdot 13$ maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 13.
$3^{105} + 4^{105} = (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = 243^{21} + 1024^{21}$
Karena 21 ganjil maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 243 + 1024 = 1267. Karena $1267 = 7 \cdot 181$ maka $3^{105} + 4^{105}$ habis dibagi 181.

Contoh 5 :
(OSK 2004 SMP/MTS) Semua n sehingga n dan $\frac{n+3}{n-1}$ keduanya merupakan bilangan bulat adalah ·····

Solusi :
Alternatif 1 :
Perhatikan bahwa $\frac{n+3}{n-1} = \frac{n-1+4}{n-1} = 1 + \frac{4}{n-1}$
Agar $1 + \frac{4}{n-1}$ merupakan bilangan bulat maka n − 1 haruslah merupakan faktor dari 4.
Maka nilai dari n − 1 adalah ±1, ±2 dan ±4.
Nilai n yang memenuhi adalah −3, −1, 0, 2, 3 dan 5.

Alternatif 2 :
Selain dengan menggunakan sifat keterbagian, soal tersebut juga bisa diselesaikan dengan memfaktorkan.
Misalkan m = $\frac{n+3}{n-1}$ untuk suatu bilangan bulat n dan m.
Persamaan di atas ekivalen dengan
n + 3 = mn − m
(m − 1)(n − 1) = 4.

n – 1 haruslah merupakan faktor dari 4.
Maka nilai dari n – 1 adalah ±1, ±2 dan ±4.
Nilai n yang memenuhi adalah –3, –1, 0, 2, 3 dan 5.

Contoh 6 :
(OSP 2005 SMP/MTs) Semua pasangan bilangan asli m dan n yang memenuhi $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=1$ adalah ⋯⋯⋯

Solusi :
Persamaan pada soal ekivalen dengan 2n + 3m = mn
(m – 2)(n – 3) = 6
Dengan demikian m – 2 dan n – 3 keduanya merupakan faktor dari 6.
Karena m dan n bilangan asli maka m – 2 > –2 dan n – 3 > –3
Maka m – 2 = 1, 2, 3 atau 6. Jadi m = 3, 4, 5 atau 8.
Jadi, pasangan (m, n) yang memenuhi adalah (3, 9), (4, 6), (5, 5), (8, 4).

LATIHAN 2 :

1. (OSK 2002) Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah
2. (OSK 2002) Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$.
3. (OSK 2003) Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai dari $a^2 + b^2$?
   (Diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)
4. (AIME 1986) Tentukan nilai n terbesar sehingga n + 10 membagi $n^3 + 100$.
5. (MATNC 2001) Jumlah N bilangan kuadrat sempurna pertama merupakan kelipatan 41. Tentuan nilai minimal dari N.
6. (OSP 2009) Diketahui k, m, dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi
   $$\frac{k}{m}+\frac{m}{4n}=\frac{1}{6}$$
   Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah ⋯⋯
7. (AIME 1987/OSP 2008) m dan n adalah bilangan bulat yang memenuhi $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$. Nilai dari $3m^2n^2$ adalah ⋯⋯
8. (AIME 1989) Lima bilangan asli berurutan memenuhi bahwa jumlahnya merupakan bilangan kubik dan jumlah tiga bilangan di tengah merupakan bilangan kuadrat. Tentukan nilai terkecil dari bilangan yang di tengah.
9. Bilangan prima terbesar kurang dari 100 yang merupakan faktor dari $3^{32} - 2^{32}$ adalah ⋯⋯
10. (AIME 1989) Misalkan k ∈ N sehingga 36 + k, 300 + k, 596 + k adalah kuadrat dari tiga bilangan yang membentuk barisan aritmatika. Tentukan nilai k.
11. (OSP 2002) Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1$, $2^5 - 2$, ⋯, $n^5 - n$, ⋯?

12. Jika n adalah bilangan bulat lebih dari 1, buktikan bahwa $n^6 - n^2$ habis dibagi 60.

13. Tunjukkan bahwa $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + 99^5 + 100^5$ habis dibagi 10100, namun tidak habis dibagi 3.

14. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang saling relatif prima dan memenuhi

$$\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$$

merupakan bilangan bulat adalah ⋯⋯⋯

15. (AIME 1993) Tentukan banyaknya tupel bilangan bulat (a,b,c,d) yang memenuhi $0 < a < b < c < d < 500$ dan $a + d = b + c$ serta $bc - ad = 93$.

16. Buktikan bahwa jika a, b dan c bilangan asli dan b adalah kelipatan a, c adalah kelipatan b serta a adalah kelipatan c maka a = b = c.

17. (AIME 2001) Tentukan penjumlahan semua bilangan asli dua angka yang habis dibagi oleh masing-masing digitnya.

18. Bilangan bulat n dikatakan merupakan kelipatan 7 jika memenuhi n = 7k dengan k bilangan bulat.
    a. Jika p dan q bilangan bulat dan memenuhi 10p + q kelipatan 7, buktikan bahwa p − 2q juga kelipatan 7.
    b. Jika c dan d bilangan bulat dan memenuhi 5c + 4d kelipatan 7, buktikan bahwa 4c − d juga kelipatan 7.

19. Tentukan bilangan bulat positif **terbesar** x yang memenuhi dua persyaratan berikut :
    a. x tidak habis dibagi 10
    b. Jika dua angka terakhir dari x^2 dibuang maka bilangan tersisa juga merupakan bilangan kuadrat.

20. (Canadian MO 1971) Untuk n bilangan bulat, tunjukkan bahwa $n^2 + 2n + 12$ bukan kelipatan 121.

21. (ME V1N2) Jumlah dua bilangan bulat positif adalah 2310. Tunjukkan bahwa hasil kali keduanya tidak habis dibagi 2310.

3. UJI HABIS DIBAGI

Sebuah bilangan memiliki sifat khusus jika dibagi oleh suatu bilangan tertentu. Beberapa sifat tersebut adalah :

a. Suatu bilangan habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhir dari bilangan tersebut adalah 0 atau 5.
   Contoh : 67585 dan 457830 adalah bilangan-bilangan yang habis dibagi 5.
b. Suatu bilangan habis dibagi 2^n jika dan hanya jika n digit terakhir dari bilangan tersebut habis dibagi 2^n.
   Contoh : 134576 habis dibagi $8 = 2^3$ sebab 576 habis dibagi 8 (576 : 8 = 72)
   4971328 habis dibagi $16 = 2^4$ sebab 1328 habis dibagi 16
c. Suatu bilangan habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 3.
   Contoh : 356535 habis dibagi 3 sebab 3 + 5 + 6 + 5 + 3 + 5 = 27 dan 27 habis dibagi 3.
d. Suatu bilangan habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.
   Contoh : 23652 habis dibagi 9 sebab 2 + 3 + 6 + 5 + 2 = 18 dan 18 habis dibagi 9.
e. Suatu bilangan habis dibagi 11 jika dan hanya jika selisih antara jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi ganjil dengan jumlah digit dari bilangan tersebut pada posisi genap habis dibagi 11.
   Contoh : 945351 habis dibagi 11 sebab (9 + 5 + 5) − (4 + 3 + 1) = 11 dan 11 habis dibagi 11. Contoh bilangan lain yang habis dibagi 11 adalah 53713 dan 245784.

Contoh 7 :
(OSK 2003) Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?

Solusi :
Penjumlahan digit 20000002 = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4 (tidak habis dibagi 9)
Penjumlahan digit 20011002 = 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6 (tidak habis dibagi 9)
Penjumlahan digit 20022002 = 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8 (tidak habis dibagi 9)
Penjumlahan digit 20033002 = 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10 (tidak habis dibagi 9)
Karena semua penjumlahan digit tidak ada yang habis dibagi 9 maka tidak ada bilangan-bilangan tersebut yang habis dibagi 9.

Contoh 8 :
(Canadian MO 1980) Jika a679b adalah bilangan lima angka yang habis dibagi 72, tentukan nilai a dan b.

Solusi :
$72 = 9 \cdot 8$. Karena 9 dan 8 relatif prima maka a679b harus habis dibagi 8 dan 9. Karena a679b habis dibagi 8 maka 79b habis dibagi 8. Agar 790 + b habis dibagi 8 maka b = 2.
Karena a6792 habis dibagi 9 maka a + 6 + 7 + 9 + 2 habis dibagi 9. Nilai a yang memenuhi hanya 3.
Jadi bilangan tersebut adalah 36792.

LATIHAN 3 :

1. (MATNC 2001) Di antara empat bilangan : 5256, 7018, 18623, 32571, yang habis dibagi 99 adalah ·····

2. (OSK 2010) Nilai n terkecil sehingga bilangan

$$\underbrace{20102010...2010}_{\text{n buah 2010}}$$

   habis dibagi 99 adalah ·····

3. N adalah bilangan bulat terbesar dengan semua digitnya berbeda dan N merupakan bilangan kelipatan 8. Tentukan tiga angka terakhir dari N ?

4. Jika dihitung maka didapat $17! = 3a56874280b6000$. Tentukan digit a dan b tanpa menggunakan kalkulator maupun alat hitung lainnya.
(Tanda "!" menyatakan faktorial. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots n$. Contoh $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$)

5. (AIME 1983) Tentukan bilangan asli terkecil n sehingga angka-angka $15n$ hanya terdiri dari 0 dan 8.

6. Tentukan bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan 84 yang angka-angkanya hanya 6 atau 7.

7. (Flanders MO 2000 Final Round) Bilangan asli n terdiri dari 7 angka berbeda dan n habis dibagi oleh masing-masing angkanya. Tentukan tiga angka yang bukan angka dari n.

4. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB) DAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

Pengertian :

FPB (a, b) adalah bilangan asli terbesar d sehingga $d \mid a$ dan $d \mid b$.

KPK (a,b) adalah bilangan asli terkecil m sehingga $a \mid m$ dan $b \mid m$.

Misalkan $M = p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdot \cdots p_n^{an}$ dan $N = p_1^{b1} \cdot p_2^{b2} \cdot p_3^{b3} \cdot \cdots p_n^{bn}$ dengan p_i adalah bilangan prima dan a_i serta b_i adalah bilangan asli maka :

a. Faktor Persekutuan Terbesar dari M dan N ditulis FPB (M, N) = $p_1^{c1} \cdot p_2^{c2} \cdot p_3^{c3} \cdot \cdots p_n^{cn}$
b. Kelipatan Persekutuan Terkecil dari M dan N ditulis KPK (M, N) = $p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots p_n^{dn}$

Dengan $c_1 = \min(a_1, b_1)$; $c_2 = \min(a_2, b_2)$; $c_2 = \min(a_3, b_3)$; $\cdots$; $c_n = \min(a_n, b_n)$
$d_1 = \text{maks}(a_1, b_1)$; $d_2 = \text{maks}(a_2, b_2)$; $d_3 = \text{maks}(a_3, b_3)$; $\cdot\cdot$; $d_n = \text{maks}(a_n, b_n)$

Beberapa hal berkaitan dengan FPB adalah :

a. FPB(0,0) = 0
b. FPB(a, 0) = $|a|$
c. FPB (a, b) = FPB ($|a|$, $|b|$)
d. FPB (a,b) = FPB(b,a)
e. Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari dua bilangan asli berurutan adalah 1.
f. Jika d = FPB(a, b) maka $d \mid a$ dan $d \mid b$
g. Misalkan a = mp dan b = mq maka FPB(a, b) = m · FPB(p, q)
h. Jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $0 \leq$ FPB(a,b) $\leq \min(|a|, |b|)$
i. Misalkan a > b > 0 dan a = bq + r untuk bilangan asli a, b, p dan r maka FPB(a,b) = FPB(b,r)
j. Dua bilangan dikatakan prima relatif, jika faktor persekutuan terbesarnya (FPB) sama dengan 1.
k. Bezout's Lemma : Untuk setiap bilangan bulat a dan b terdapat bilangan bulat x dan y yang memenuhi ax + by = FPB(a, b)

Contoh 9 :

(OSK 2003 SMP/MTs) Kelipatan Persekutuan Terkecil dari 210, 42 dan 70 adalah ·····

A. 14 B. 210 C. 420 D. 7 E. 1260

Solusi :

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

Maka KPK (210, 42, 70) = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. (Jawaban : B)

Contoh 10 :

Bila KPK dan FPB dari empat bilangan berbeda 18, 24, 18n dan 72 adalah 72 dan 6, tentukan nilai n asli yang memenuhi.

Solusi :

KPK(18, 24, 18n, 72) = $72 = 2^3 \cdot 3^2$
FPB(18, 24, 18n, 72) = $6 = 2 \cdot 3$
$18 = 2^a 3^b$; $24 = 2^c 3^d$; $18n = 2 \cdot 3^2 n = 2^e 3^f$ dan $72 = 2^g 3^h$
maks (a, c, e, g) = 3 ; maks (b, d, f, h) = 2 ; min (a, c, e, g) = 1 ; min (b, d, f, h) = 1
Karena a = 1, c = 3, g = 3 maka e = 1, 2 atau 3
Karena b = 2, d = 1, h = 2 maka f = 1 atau 2.
Tetapi $f_{min} = 2$ maka f = 2
$18n = 2 \cdot 3^2 n = 2^e 3^2$
Jika e = 1 maka n = 1 sehingga 18n = 18

Jika e = 2 maka n = 2 sehingga 18n = 36
Jika e = 3 maka n = 4 sehingga 18n = 72
Karena keempat bilangan tersebut berbeda maka 18n = 36
n = 2
Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah n = 2.

Contoh 11 :
(OSP 2006) Misalkan d = FPB(7n + 5, 5n + 4), dimana n adalah bilangan asli.
a. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d = 1 atau 3.
b. Buktikan bahwa d = 3 jika dan hanya jika n = 3k + 1, untuk suatu bilangan asli k.

Solusi :
d = FPB(7n + 5, 5n + 4)
a. Maka $d \mid 7n + 5$ dan $d \mid 5n + 4$
   Karena d membagi 7n + 5 maka d juga membagi 5(7n + 5)
   Karena d membagi 5n + 4 maka d juga membagi 7(5n + 4)
   Akibatnya d juga membagi 7(5n + 4) − 5(7n + 5) = 3
   Karena $d \mid 3$ maka d = 1 atau 3 (terbukti)
b. Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2
   Jika n = 3k maka 7n + 5 = 21k + 5 $\equiv$ 2 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 4 $\equiv$ 1 (mod 3)
   Jika n = 3k + 1 maka 7n + 5 = 21k + 12 $\equiv$ 0 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 9 $\equiv$ 0 (mod 3)
   Jika n = 3k + 2 maka 7n + 5 = 21k + 19 $\equiv$ 1 (mod 3) dan 5n + 4 = 15k + 14 $\equiv$ 2 (mod 3)
   Hanya bentuk n = 3k + 1 yang menyebabkan kedua bilangan 7n + 5 dan 5n + 4 habis dibagi 3 untuk n bilangan asli.
   Jadi, terbukti bahwa d = 3 jika dan hanya jika n = 3k + 1, untuk suatu bilangan asli k

LATIHAN 4 :

1. (OSK 2008) Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah ·····

2. (OSK 2011) Bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 adalah ·····

3. (OSK 2009) Nilai dari $\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7)$ adalah ········

4. (OSP 2004) Notasi fpb(a, b) menyatakan *faktor persekutuan terbesar* dari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1 < a_2 < a_3$ memenuhi fpb(a_1, a_2, a_3) = 1, tetapi fpb(a_i, a_j) > 1 jika $i \neq j$, i, j = 1, 2, 3. Tentukan (a_1, a_2, a_3) agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal.

5. (OSP 2006) Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan a + 2, a + 1, a yaitu N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$. Sebagai contoh, untuk a = 8, N = 1098. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar ·····

6. (OSP 2010) Banyaknya anggota himpunan
   $$S = \{\gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in Z\}$$
   adalah ·····

7. (AIME 1998) Ada berapa banyak nilai k sehingga KPK(6^6, 8^8, k) = 12^{12} ?

8. Jumlah dua bilangan asli sama dengan 52 sedangkan Kelipatan Persekutuan Terkecilnya sama dengan 168. Tentukan selisih positif dua bilangan tersebut.

9. Dua bilangan memiliki jumlah 145. Misalkan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) kedua bilangan tersebut adalah k dan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) kedua bilangan tersebut adalah d. Jika perbandingan k : d = 168, maka tentukan selisih positif kedua bilangan tersebut ?

10. (ME V5N4) Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi :

$$\text{FPB}(a, b) + \text{KPK}(a, b) = a + b + 6$$

11. (IMO 1959) Buktikan bahwa pecahan $\frac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan untuk semua nilai n bilangan asli.

12. (Mexican MO 1987) Buktikan bahwa pecahan $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ tidak dapat disederhanakan untuk semua nilai n bilangan asli.

13. (AIME 1985) Misalkan d(n) adalah faktor persekutuan terbesar dari $100 + n^2$ dan $100 + (n + 1)^2$ untuk setiap n = 1, 2, 3, ⋯. Tentukan nilai d(n) yang terbesar.

5. BANYAKNYA FAKTOR POSITIF

Misalkan M = $p_1^{a1} \cdot p_2^{a2} \cdot p_3^{a3} \cdot \cdots p_n^{an}$ untuk bilangan asli M serta p_1, p_2, p_3, ⋯, p_n semuanya adalah bilangan prima maka :
Banyaknya faktor positif dari M adalah $(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \cdots (a_n + 1)$

Contoh 12 :
(OSK 2004 SMP/MTs) Joko mengalikan tiga bilangan prima berbeda sekaligus. Ada berapa faktor berbeda dari bilangan yang dihasilkan ?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 8

Solusi :
Misalkan tiga bilangan prima tersebut adalah a, b dan c dan N = a x b x c.
Maka sesuai teori, banyaknya faktor positif dari N adalah (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8. (Jawaban : E)
Kedelapan faktor tersebut adalah 1, a, b, c, ab, ac, bc dan abc.
Jadi, banyaknya faktor berbeda adalah 8.

Contoh 13 :
(OSK 2004) Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak ⋯⋯

Solusi :
$2004 = 2^2 \cdot 501$
$2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ dan 167 adalah bilangan prima.
Maka banyaknya faktor positif dari 2004 termasuk 1 dan 2004 = (2 +1)(1 + 1)(1 + 1) = 12
Banyaknya faktor 2004 selain 1 dan 2004 adalah = 12 − 2 = 10
Faktor dari 2004 selain 1 dan 2004 adalah : 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002.
Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak 10

LATIHAN 5 :

1. (OSK 2008) Banyaknya faktor positif dari 5! adalah
2. (OSP 2007) Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ⋯⋯⋯
3. (MATNC 2001) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif.
4. (MATNC 2001) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki tepat 12 faktor positif dan tidak habis dibagi 3.
5. (OSP 2002) Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M − m ?
6. (OSP 2009) Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ⋯⋯
7. (AIME 1990) n adalah bilangan asli terkecil yang merupakan kelipatan 75 dan memiliki tepat 75 faktor positif. Tentukan nilai dari $\frac{n}{75}$.

8. Misalkan n bilangan asli. 2n mempunyai 28 faktor positif dan 3n punya 30 faktor positif maka banyaknya faktor positif yang dimiliki 6n adalah ⋯⋯

9. (OSK 2011) Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 10 ?

10. (AIME 1994) Tentukan faktor prima terbesar dari p(1) + p(2) + ⋯ + p(999) dimana p(n) adalah hasil kali semua angka-angka taknol dari n.

11. (MATNC 2001) Tentukan penjumlahan semua faktor positif dari 84.

12. (AIME 1995) Tentukan banyaknya faktor positif dari n^2 yang kurang dari n tetapi tidak membagi n jika $n = 2^{31} 3^{19}$.

13. (AIME 2000) Tentukan bilangan asli terkecil yang memiliki 12 faktor positif genap dan 6 faktor positif ganjil.

14. (OSN 2004) Berapa banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari $5^6 - 1$?

6. KEKONGRUENAN

Konsep kekongruenan bilangan dikembangkan berdasarkan konsep bahwa setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan ke dalam bentuk $N = pq + r$ atau $N - r = pq$ dengan p, q, r adalah bilangan bulat dan r berada pada $0 \le r < p$. Persamaan $N = pq + r$ dengan p menyatakan pembagi, q menyatakan hasil bagi dan r menyatakan sisa.

Persamaan di atas sering pula ditulis $N \equiv r \pmod p$

Dari hal tersebut didapat definisi bahwa $a \equiv b \pmod m$ jika $m \mid (a - b)$ untuk bilangan bulat a, b dan m.

Contoh :

(1) $25 \equiv 1 \pmod 4$ sebab $4 \mid 24$

(2) $1 \equiv -3 \pmod 4$ sebab $4 \mid 4$

Beberapa sifat berkaitan dengan modulu adalah sebagai berikut. Misalkan a, b, c, d dan m adalah bilangan-bilangan bulat dengan $d > 0$ dan $m > 0$, berlaku :

(i) $a \equiv a \pmod m$

(ii) Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $b \equiv a \pmod m$

(iii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $b \equiv c \pmod m$ maka $a \equiv c \pmod m$

(iv) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $d \mid m$ maka $a \equiv b \pmod d$

(v) Jika $a \equiv b \pmod m$ maka $a^k \equiv b^k \pmod m$ untuk semua k bilangan asli

(vi) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_o$ maka $f(a) \equiv f(b) \pmod m$

(vii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$ maka $a + c \equiv b + d \pmod m$

(viii) Jika $a \equiv b \pmod m$ dan $c \equiv d \pmod m$ maka $ac \equiv bd \pmod m$

(ix) $(am + b)^k \equiv b^k \pmod m$ untuk semua k bilangan asli

(x) Dari sifat (viii) didapat $(am + b)^k \cdot (cm + d)^n \equiv b^k \cdot d^n \pmod m$ untuk semua k dan n bilangan asli

(xi) Jika $ca \equiv cb \pmod m$ dan FPB(c, m) = 1 maka $a \equiv b \pmod m$

(xii) Misalkan $n \in N$ dan S(n) adalah penjumlahan digit-digit dari n maka berlaku $n \equiv S(n) \pmod 9$.

(xiii) $n^5 \equiv n \pmod{10}$ untuk setiap $n \in N$.

Contoh 14 :

(OSP 2004 SMP/MTs) Untuk bilangan bulat a dan b, <a, b> artinya bilangan bulat tak negatif yang merupakan sisa a x b jika dibagi oleh 5. Bilangan yang ditunjukkan oleh <–3, 4> adalah ⋯⋯

Solusi :

Karena $-3 \times 4 = -12 = 5 \times (-3) + 3$ maka <–3, 4> = 3

Jadi, <–3, 4> = 3.

Contoh 15 :

(OSN 2003 SMP/MTs) Untuk menarik minat pelanggan, suatu restoran penjual makanan cepat saji memberikan kupon berhadiah kepada setiap orang yang membeli makanan di restoran tersebut dengan nilai lebih dari Rp. 25.000,-. Di balik setiap kupon tersebut tertera salah satu dari bilangan-bilangan berikut : 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24 dan 81. Pembeli yang berhasil mengumpulkan kupon dengan jumlah bilangan di balik kupon tersebut sama dengan 100 akan diberi hadiah berupa TV 21". Kalau pemilik restoran tersebut menyediakan sebanyak 10 buah TV 21", berapa banyak yang harus diserahkan kepada para pelanggannya ?

Solusi :

Bilangan-bilangan 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24 dan 81 semuanya habis dibagi 3.

Maka penjumlahan bilangan-bilangan mana pun di antara 9, 12, 42, 57, 69, 21, 15, 75, 24 dan 81 akan menghasilkan suatu bilangan yang habis dibagi 3.

Tetapi 100 jika dibagi 3 akan bersisa 1.

Maka tidak ada TV yang diserahkan.

Contoh 16 :

Tentukan angka satuan dari 7^{7^7}.

Solusi :

Dalam persoalan bentuk perpangkatan dengan modulu m selalu diusahakan agar didapat suatu bilangan yang bersisa 1 atau –1 jika dibagi dengan m agar memudahkan dalam perhitungan sebab $1^k = 1$ sedangkan $(-1)^k$ sama dengan 1 atau –1 bergantung dari paritas k untuk k suatu bilangan bulat.
Angka satuan merupakan sisa jika suatu bilangan dibagi 10.

Alternatif 1 :

Perlu diingat bahwa $7^4 = 2401$ yang bersisa 1 jika dibagi 10.
Maka akan dibuat pangkat dari bilangan pokok 7 dinyatakan dalam modulu 4.
$7^2 \equiv 1 \pmod 4$
$7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 1^3 \cdot 7 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$
Sehingga $7^7 = 4k + 3$ untuk suatu bilangan asli k.

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} = \left(7^4\right)^k \cdot 7^3 = (240 \cdot 10 + 1)^k \cdot (34 \cdot 10 + 3) \equiv 1^k \cdot 3 \pmod{10}$$

$$7^{7^7} \equiv 3 \pmod{10}$$

Jadi, angka satuan dari 7^{7^7} adalah 3.

Alternatif 2 :

$7^2 = 49$ yang bersisa –1 jika dibagi 10.
Mngingat bahwa $(-1)^k$ bernilai positif hanya jika k genap maka akan dibuat pangkat dari bilangan pokok 7 dinyatakan dalam modulu 4.
$7^2 \equiv 1 \pmod 4$
$7^7 = (7^2)^3 \cdot 7 \equiv 1^3 \cdot 7 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$
Sehingga $7^7 = 4k + 3$ untuk suatu bilangan asli k.

$$7^{7^7} = 7^{4k+3} = (7^2)^{2k} \cdot 7^3 \equiv (5 \cdot 10 - 1)^{2k} \cdot (343) \pmod{10} \equiv (-1)^{2k} \cdot (3) \pmod{10} \equiv 3 \pmod{10}$$

Jadi, angka satuan dari 7^{7^7} adalah 3.
Cara lain penyelesaian soal tersebut adalah dengan melihat pola dari angka satuan yang selalu berulang. Cara ini tidak dibahas dalam contoh ini dan dipersilakan kepada Pembaca untuk menyelesaikannya.

Contoh 17 :

Tentukan angka satuan dari 2007^{2009}.

Solusi :

Mencari angka satuan dari suatu bilangan sama dengan mencari sisa jika bilangan tersebut dibagi 10.
$2007^{2009} = (200 \cdot 10 + 7)^{2009}$
$2007^{2009} \equiv 7^{2009} \pmod{10}$ (menggunakan sifat (ix))

Alternatif 1 :

$2007^{2009} \equiv (7^4)^{502} \cdot 7^1 \pmod{10}$
$2007^{2009} \equiv (240 \cdot 10 + 1)^{502} \cdot 7^1 \pmod{10}$
$2007^{2009} \equiv 1^{502} \cdot 7 \pmod{10}$ (menggunakan sifat (x))
$2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$
Jadi, angka satuan 2007^{2009} adalah 7.

Alternatif 2 :

$2007^{2009} \equiv (7^2)^{1004} \cdot 7^1 \pmod{10}$
$2007^{2009} \equiv (5 \cdot 10 - 1)^{1004} \cdot 7^1 \pmod{10}$
$2007^{2009} \equiv (-1)^{1004} \cdot 7 \pmod{10}$ (menggunakan sifat (x))
$2007^{2009} \equiv 7 \pmod{10}$
Jadi, angka satuan 2007^{2009} adalah 7.

Contoh 18 :
(OSK 2004 SMP/MTs) Jika 2^{13} dibagi dengan 13, maka akan memberikan sisa sama dengan ·····

Solusi :
Alternatif 1 :
$2^{13} = 8192 = 13 \cdot 630 + 2$
Maka sisa jika 2^{13} dibagi dengan 13 adalah 2.

Alternatif 2 :
Alternatif 1 bisa digunakan untuk suatu bilangan-bilangan kecil. Tetapi jika pangkat dari 2 merupakan bilangan yang besar maka cara tersebut tidak efektif. Alternatif berikut bisa dipertimbangkan.
$2^{13} = (2^6)^2 \cdot 2 = (13 \cdot 5 - 1)^2 \cdot 2 \equiv (-1)^2 \cdot 2 \pmod{13} \equiv 2 \pmod{13}$
Maka sisa jika 2^{13} dibagi dengan 13 adalah 2.

Contoh 19 :
Tentukan sisa pembagian $3 \cdot 53 + 27^{2010}$ oleh 7.

Solusi :
$53 = (8 \cdot 7 - 3) \equiv -3 \pmod 7$
$3 \cdot 53 \equiv 3(-3) \pmod 7 \equiv -9 \pmod 7 \equiv -2 \pmod 7$
$27 \equiv -1 \pmod 7$ sehingga $27^{2010} \equiv (-1)^{2010} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
$3 \cdot 53 + 27^{2010} \equiv -2 + 1 \pmod 7 \equiv -1 \pmod 7 \equiv 6 \pmod 7$
Jadi, sisa pembagian $3 \cdot 53 + 27^{2010}$ oleh 7 adalah 6.

Contoh 20 :
(MATNC 2001) N adalah bilangan asli yang memenuhi $N \equiv 2 \pmod 3$ dan $N \equiv 1 \pmod 2$. Tentukan sisanya jika N dibagi 6.

Solusi :
Alternatif 1 :
Karena N jika dibagi 3 bersisa 2 maka N jika dibagi 6 akan bersisa 2 atau 5.
Karena N bersisa 1 jika dibagi 2 maka tidak mungkin N akan berbentuk $N = 6k + 2$.
Maka $N = 6k + 5$.
Jadi, jika N dibagi 6 maka akan bersisa 5.

Alternatif 2 :
Karena $N \equiv 1 \pmod 2$ maka $N = 2p - 1$ untuk suatu bilangan bulat p.
$2p - 1 \equiv 2 \pmod 3$ sehingga $2p \equiv 0 \pmod 3$
Karena 2 dan 3 relatif prima maka $p \equiv 0 \pmod 3$
Maka didapat $p = 3q$ untuk suatu bilangan bulat q.
$N = 6q - 1 \equiv -1 \pmod 6 \equiv 5 \pmod 6$
Jadi, sisanya jika N dibagi 6 adalah **5**.

Alternatif 3 :
Karena $N \equiv 1 \pmod 2$ maka $N = 2p + 1$ untuk suatu bilangan bulat p.
$2p + 1 \equiv 2 \pmod 3$ sehingga $2p \equiv 1 \pmod 3$
Karena 2 dan 3 relatif prima maka $p \equiv 2 \pmod 3$
Maka didapat $p = 3q + 2$ untuk suatu bilangan bulat q.
$N = 2(3q + 2) + 1 \equiv 5 \pmod 6$
Jadi, sisanya jika N dibagi 6 adalah **5**.

Alternatif 4 :
Karena N ≡ 2 (mod 3) maka N = 3p + 2 untuk suatu bilangan bulat p.
3p + 2 ≡ 1 (mod 2) sehingga 3p ≡ 1 (mod 2)
Karena 2 dan 3 relatif prima maka p ≡ 1 (mod 2)
Maka didapat p = 2q + 1 untuk suatu bilangan bulat q.
N = 3(2q + 1) + 2 ≡ 5 (mod 6)
Jadi, sisanya jika N dibagi 6 adalah **5**.

Contoh 21 :
Tentukan dua angka terakhir dari 3^{2009}.

Solusi :
$3^{2009} = (3^5)^{400} \cdot 3^9 = (243)^{400} \cdot 3^9$
$3^{2009} \equiv (43)^{400} \cdot 3^9 \pmod{100}$
$3^{2009} \equiv (1849)^{200} \cdot 3^9 \pmod{100}$
$3^{2009} \equiv (49)^{200} \cdot 19683 \pmod{100}$
$3^{2009} \equiv (2401)^{100} \cdot 83 \pmod{100}$
$3^{2009} \equiv (1)^{100} \cdot 83 \pmod{100}$
$3^{2009} \equiv 83 \pmod{100}$
Jadi, dua angka terakhir dari 3^{2009} adalah 83.

LATIHAN 6 :

1. (OSK 2009) Jika $10^{999999999}$ dibagi oleh 7, maka sisanya adalah ⋯⋯⋯

2. (MATNC 2001) N adalah bilangan asli yang memenuhi N ≡ 2 (mod 3) dan N ≡ 1 (mod 2). Tentukan sisanya jika N dibagi 6.

3. (OSK 2003) Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N ?

4. (MATNC 2001) Tentukan angka puluhan dari 7^{707}.

5. (OSP 2002) Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100 ?

6. (OSP 2003) Berapakah sisa pembagian 1 · 1! + 2 · 2! + 3 · 3! + ⋯ + 99 · 99! + 100 · 100! oleh 101 ?

7. (MATNC 2001) Jika 10a ≡ 1 (mod 13) maka 17a jika dibagi 13 akan bersisa ⋯⋯

8. (OSK 2005) Mana di antara 5 ekspresi $5^{5^{5^5}}$, $6^{6^{6^6}}$, $8^{8^{8^8}}$, $9^{9^{9^9}}$ dan $10^{10^{10^{10}}}$ yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 ?

9. (OSP 2011) Bilangan asli n yang memenuhi $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 2000 adalah ⋯⋯

10. (AIME 1989) Diberikan $133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = k^5$ dengan k bilangan bulat. Tentukan nilai k.

11. (MATNC 2001) Tentukan sisanya jika 5^{301} dibagi 8.

12. (MATNC 2001) Jika N ≡ 2 (mod 4) dan M ≡ 8 (mod 16) maka sisanya jika MN dibagi 32 adalah ⋯⋯

13. (AIME 1994) Fungsi f memenuhi $f(x) + f(x - 1) = x^2$ untuk semua bilangan real x. Diketahui f(19) = 94. Tentukan sisanya jika f(94) dibagi 1000.

14. (MATNC 2001) Tentukan sisanya jika 337.500.000 dibagi 128.

15. (AIME 1994) Barisan 3, 15, 24, 48, ···· adalah barisan bilangan asli yang merupakan kelipatan 3 dan kurang 1 dari suatu bilangan kuadrat. Tentukan sisanya jika suku ke-1994 dibagi 1000.

16. Berapakah sisanya jika $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 2005$ dibagi 1000 ?

17. (OMITS 2011) Tentukan sisanya jika $2011^{2011^{2011}}$ dibagi 14.

18. Tentukan semua kemungkinan sisa jika N^{100} dibagi 125 dengan N adalah bilangan bulat ?

19. (AIME 1988) Tentukan bilangan asli terkecil yang jika dipangkattigakan akan berakhiran dengan 888.

7. BILANGAN BULAT, RASIONAL DAN PRIMA

Secara umum bilangan dibagi menjadi dua yaitu bilangan real dan bilangan tidak real.
Bilangan real dibagi menjadi dua yaitu bilangan rasional dan bilangan tak rasional.

Bilangan rasional adalah bilangan real yang dapat diubah ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan b ≠ 0 sedangkan bilangan tak rasional adalah bilangan real yang tidak dapat diubah ke dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan b ≠ 0.
Contoh bilangan tak rasional adalah $\sqrt{2}$, π, e, ${}^{2}\log 3$ dan sebagainya.

Bilangan rasional dapat dibagi menjadi dua yaitu bilangan bulat dan bilangan pecahan.
Sebuah bilangan bulat positif dapat diuraikan menjadi dalam bentuk angka-angkanya. Misalkan $\overline{ABCDE\cdots N}$ adalah suatu bilangan yang terdiri dari n digit, maka dapat diuraikan menjadi $A\cdot10^{n-1} + B\cdot10^{n-2} + C\cdot10^{n-3} + D\cdot10^{n-4} + \cdots + N$.
Sebuah bilangan bulat selalu dapat diubah menjadi bentuk pq + r dengan $0 \le r < p$. Sehingga jika sebuah bilangan bulat dibagi oleh p maka kemungkinan sisanya ada p yaitu 0, 1, 2, ⋯, p − 1.
Sebagai contoh jika sebuah bilangan bulat dibagi oleh 3 maka kemungkinan sisanya adalah 0, 1 atau 2. Maka setiap bilangan bulat dapat diubah menjadi salah satu bentuk 3k, 3k + 1 atau 3k + 2 untuk suatu bilangan bulat k.

Bilangan bulat positif p > 1 merupakan bilangan prima jika hanya memiliki tepat dua faktor positif yaitu 1 dan p itu sendiri sedangkan bilangan bulat n merupakan bilangan komposit jika n memiliki lebih dari dua faktor positif.
Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.
Beberapa sifat bilangan prima :
(1) Bilangan prima p hanya memiliki dua faktor positif yaitu 1 dan p
(2) Bilangan prima tidak mungkin memiliki angka satuan 0 sedangkan bilangan prima yang memiliki angka satuan sama dengan 5 hanya ada 1 yaitu 5.
(3) Jika p prima maka untuk sebarang bilangan asli n berlaku $p \mid n$ atau FPB(p, n) = 1.
(4) Jika bilangan prima p membagi n^2 untuk suatu bilangan asli n maka $p \mid n$.
(5) Jika bilangan prima p memenuhi $p \mid ab$ untuk a dan b bilangan asli maka $p \mid a$ atau $p \mid b$.
(6) Semua bilangan prima p > 3 memiliki bentuk $6k \pm 1$.
(7) Jika n bukan bilangan prima maka faktor prima terkecil dari n selalu $\le \sqrt{n}$. Tanda sama dengan terjadi jika n meupakan kuadrat dari suatu bilangan prima.

Contoh 22 :
(OSP 2002) Bilangan real 2,525252⋯ adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, n ≠ 0. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah m + n ?

Solusi :
Misal X = 2,525252⋯
100X = 252,525252⋯
100X − X = 252,525252⋯ − 2,525252⋯
99X = 250
X = $\frac{250}{99}$
Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99
Jadi, m + n = 349.

Contoh 23 :
Tentukan semua kemungkinan sisa jika bilangan kuadrat dibagi oleh 5.

Solusi :
Sebuah bilangan bulat pasti termasuk ke dalam salah satu bentuk 5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 atau 5k + 4 untuk suatu bilangan bulat k.
Jika $n = 5k$ maka $n^2 = (5k)^2 \equiv 0 \pmod 5$
Jika $n = 5k + 1$ maka $n^2 = (5k + 1)^2 \equiv 1^2 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$
Jika $n = 5k + 2$ maka $n^2 = (5k + 2)^2 \equiv 2^2 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 5$
Jika $n = 5k + 3$ maka $n^2 = (5k + 3)^2 \equiv 3^2 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 5$
Jika $n = 5k + 4$ maka $n^2 = (5k + 4)^2 \equiv 4^2 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$
Jadi, jika bilangan kuadrat dibagi oleh 5 maka kemungkinan sisanya adalah 0, 1 atau 4.

Contoh 24 :
Carilah bilangan bulat yang terdiri dari 6 angka dengan angka terakhir 7 yang menjadi 5 kali bilangan semula jika angka terakhir tersebut tempatnya dipindahkan menjadi angka pertama.

Solusi :
Misal bilangan tersebut adalah N = ABCDE7, maka
$700000 + 10000A + 1000B + 100C + 10D + E = 5 (100000A + 10000B + 1000C + 100D + 10E + 7)$
$490000A + 49000B + 4900C + 490D + 49E = 699965$
$10000A + 1000B + 100C + 10D + E = 14285$
Maka : A = 1 ; B = 4 ; C = 2 ; D = 8 ; E = 5
Jadi, bilangan tersebut adalah 142857

Contoh 25 :
Suatu bilangan terdiri dari 2 angka. Bilangan tersebut sama dengan 4 kali jumlah kedua angka tersebut. Jika angka kedua dikurangi angka pertama sama dengan 2, tentukan bilangan tersebut.

Solusi :
Misal bilangan itu adalah ab maka $10a + b = 4(a + b)$ sehingga $2a = b$
Karena $b - a = 2$ maka $2a - a = 2$ sehingga $a = 2$ dan $b = 4$
Jadi bilangan tersebut adalah 24.

Contoh 26 :
Berapakah banyaknya bilangan 3 angka abc (dengan $a > 0$) sehingga nilai $a^2 + b^2 + c^2$ membagi 26 ?

Solusi :
Karena $a^2 + b^2 + c^2$ membagi 26 maka $a^2 + b^2 + c^2$ memiliki 4 kemungkinan nilai.

- Jika $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
  Tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (1, 0, 0) sebanyak 1 bilangan.
- Jika $a^2 + b^2 + c^2 = 2$
  Tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (1, 1, 0) beserta permutasinya kecuali untuk a = 0 yang terdiri dari 2 bilangan, yaitu 110, 101.
- Jika $a^2 + b^2 + c^2 = 13$
  Tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (2, 3, 0) beserta permutasinya kecuali untuk a = 0. Banyaknya bilangan ada 4 bilangan, yaitu 203, 230, 302, 320.
- Jika $a^2 + b^2 + c^2 = 26$
  Tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (1, 5, 0) dan (1, 3, 4) beserta permutasinya kecuali untuk a = 0. Banyaknya bilangan ada 10 bilangan, yaitu 105, 150, 501, 510, 134, 143, 314, 341, 413, 431.

Jadi, banyaknya bilangan = 1 + 2 + 4 + 10 = **17**.

LATIHAN 7 :

1. (OSK 2011 Tipe 3) Untuk bilangan asli n, p(n) dan s(n) berturut-turut menyatakan hasil kali dan jumlah angka pembentuk n. Jika n bilangan dua angka dan n + p(n) + s(n) = 69 , maka n adalah ⋯⋯⋯

2. Suatu bilangan terdiri dari 3 angka. Bilangan tersebut sama dengan 12 kali jumlah ketiga angkanya. Tentukan bilangan tersebut.

3. (OSK 2006) Nanang mencari semua bilangan empat-angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari ⋯⋯

4. (OSK 2010) Pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi 2x + 5y = 2010 sebanyak ⋯⋯

5. Jika jumlah digit-digit dari bilangan asli m adalah 30, maka penjumlahan semua kemungkinan jumlah dari digit-digit m + 3 sama dengan ….

6. (OSK 2002) Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 yang berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat x > 0 dan y > 0 ?

7. (AIME 1986) abc adalah bilangan asli tiga angka. Jika acb + bca + bac + cab + cba = 3194, tentukan nilai dari abc.

8. Untuk n bilangan asli, s(n) adalah penjumlahan angka-angka n dalam desimal. Tentukan nilai n maksimal yang memenuhi n = 7 s(n).

9. (QAMT 2001) Tentukan semua bilangan tiga angka yang merupakan penjumlahan dari faktorial digit-digitnya.

10. (AIME 1997) M adalah bilangan asli dua angka ab sedangkan N adalah bilangan asli tiga angka cde. Jika 9 ⋅ M ⋅ N = abcde, maka tentukan semua pasangan (M, N) yang memenuhi.

11. (AIME 1992) Ada berapa banyak pasangan bilangan asli **berurutan** yang diambil dari himpunan {1000, 1001, 1002, 1003, ⋯, 2000} sehingga jika dijumlahkan maka tidak ada 'simpanan' ? (Sebagai contoh jika 1004 dijumlahkan dengan 1005 maka tidak ada 'simpanan', tetapi jika 1005 dijumlahkan dengan 1006 maka saat menjumlahkan 5 dengan 6 maka hasilnya adalah 1 dan 'simpanan' 1).

12. (AIME 1989) Untuk suatu digit d, maka 0,d25d25d25⋯ = $\frac{n}{810}$ dimana n ∈ N. Tentukan n.

13. (OSP 2003) Tentukan semua bilangan bulat a dan b sehingga bilangan
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
merupakan bilangan rasional.

14. (AIME 1992) Tentukan penjumlahan semua bilangan rasional positif $\frac{a}{30}$ yang merupakan bentuk paling sederhana serta nilainya < 10.

15. (AIME 1992) Misalkan S adalah himpunan semua bilangan rasional yang dapat ditulis ke dalam bentuk 0,abcabcabcabc ⋯ dimana bilangan asli a, b dan c tidak harus berbeda. Jika semua anggota S ditulis ke dalam bentuk $\frac{r}{s}$ dalam bentuk yang paling sederhana, maka ada berapa banyaknya nilai r berbeda yang muncul.

16. (Canadian MO 1971) Misalkan n adalah bilangan lima angka dan m adalah bilangan empat angka yang didapat dengan menghapus angka yang ada di tengah dari bilangan n. Tentukan semua nilai n yang memenuhi bahwa $\frac{n}{m}$ adalah bilangan bulat.

17. a. Diketahui bahwa $x + y$ dan $x + y^2$ keduanya bilangan rasional. Apakah dapat dipastikan x dan y keduanya rasional ? Jelaskan.
    b. Diketahui bahwa $x + y$, $x + y^2$ dan $x + y^3$ ketiganya bilangan rasional. Apakah dapat dipastikan x dan y keduanya rasional ? Jelaskan.

18. (OSP 2009) Diberikan n adalah bilangan asli. Misalkan $x = 6 + 2009\sqrt{n}$. Jika $\frac{x^{2009} - x}{x^3 - 1}$ merupakan bilangan rasional, tunjukkan bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.

19. (OSK 2006) Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah

20. (OSP 2006) Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah ····

21. (OSK 2009) Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga $x^4 + 4y^4$ merupakan bilangan prima adalah ·····

22. (AIME 1999) Tentukan bilangan terkecil a_5 sehingga a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 membentuk barisan aritmatika dengan a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 semuanya bilangan prima.

23. (OSK 2002) Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima diantara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat : satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

24. (OSP 2010) Bilangan prima p sehingga $p^2 + 7^3$ merupakan bilangan kubik sebanyak ······

25. (OSP 2009) Bilangan prima p yang memenuhi $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak ······

26. (OSK 2011 Tipe 1) Tentukan semua bilangan bulat positif p sedemikian sehingga p, p + 8, p + 16 adalah bilangan prima.

27. Untuk n bilangan bulat berapakah sehingga $11 \cdot 14^n + 1$ adalah bilangan prima ?

28. (AIME 1983) Tentukan bilangan prima dua angka terbesar yang membagi ${}_{200}C_{100}$. Catatan : ${}_nC_r$ didefinisikan $\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Contoh 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120.

29. (OSK 2010) Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak ······

30. (Baltic Way 1999 Mathematical Team Contest) a, b, c dan d bilangan prima yang memenuhi $a > 3b > 6c > 12d$ dan $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Tentukan semua kemungkinan nilai dari $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

31. (British MO 2006/2007 Round 1) Tentukan 4 bilangan prima kurang dari 100 yang merupakan faktor dari $3^{32} - 2^{32}$.

32. (OSP 2010) Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ yang memenuhi

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_k}=\frac{7+nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$$

Tentukan banyaknya n yang memenuhi.

33. (OSP 2009) Diketahui p adalah bilangan prima sehingga persamaan $7p = 8x^2 - 1$ dan $p^2 = 2y^2 - 1$ mempunyai solusi x dan y berupa bilangan bulat. Tentukan semua nilai p yang memenuhi.

8. BILANGAN KUADRAT SEMPURNA.

Bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan bulat yang dapat diubah ke dalam bentuk n^2 dengan n adalah bilangan bulat.

Contoh, 16 adalah bilangan kuadrat sempurna sebab $16 = 4^2$.

Beberapa sifat bilangan kuadrat adalah :

a. Angka satuan dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.
b. Bilangan kuadrat jika dibagi 3 akan bersisa 0 atau 1.
c. Bilangan kuadrat jika dibagi 4 akan bersisa 0 atau 1
d. Bilangan kuadrat jika dibagi 5 akan bersisa 0, 1, atau 4.
e. Bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, atau 4. Dan seterusnya.

Contoh 27 :

Tentukan bilangan kuadrat 4 angka dengan angka pertama sama dengan angka kedua dan angka ketiga sama dengan angka keempat.

Solusi :

Misal bilangan tersebut adalah aabb.

Karena aabb kuadrat maka nilai b yang memenuhi adalah 0, 1, 4, 5, 6, atau 9. Tetapi 11, 55, 99 jika dibagi 4 bersisa 3 sedangkan 66 jika dibagi 4 bersisa 2 yang membuat aabb tidak mungkin merupakan bilangan kuadrat. Jadi nilai b yang mungkin adalah 0 atau 4.

Jika b = 0 maka $aa00 = 10^2(10a + a)$ yang berakibat 10a + a harus bilangan kuadrat. Tetapi 11, 22, 33, ⋅⋅⋅, 99 tidak ada satupun yang merupakan bilangan kuadrat. Sehingga tidak mungkin aa00 kuadrat. Jadi,$b \neq 0$.

Jika b = 4 maka aa44 = 11(100a + 4). Karena aa44 bilangan kuadrat maka $100a + 4 = 11k^2$. Sesuai dengan sifat bilangan habis dibagi 11 maka a + 4 − 0 habis dibagi 11. Nilai a yang memenuhi hanya 7.

Jadi bilangan tersebut adalah 7744.

LATIHAN 8 :

1. Tentukan bilangan asli terkecil yang jika dikalikan dengan 420 maka hasilnya adalah bilangan kuadrat sempurna.

2. (AIME 2001) Tentukan bilangan asli terbesar sehingga dua angka berurutan membentuk kuadrat sempurna. Sebagai contoh adalah 364 sebab 36 dan 64 merupakan bilangan kuadrat sempurna.

3. a, b, c dan d adalah digit-digit suatu bilangan. Bilangan 7 angka berikut :
   a0bc225 ; abcd756 ; 1abc584 ; ab3c289 ; 4abc899
   merupakan kuadrat sempurna, kecuali ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

4. Buktikan bahwa tidak ada pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi
   $a^2 = 2005b^2 + 2$

5. Adakah di antara bilangan-bilangan
   11, 111, 1111, ⋅⋅⋅, 111⋅⋅⋅1111
   22, 222, 2222, ⋅⋅⋅, 222⋅⋅⋅2222
   33, 333, 3333, ⋅⋅⋅, 333⋅⋅⋅3333
   ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅
   99, 999, 9999, ⋅⋅⋅, 999⋅⋅⋅9999
   yang merupakan bilangan kuadrat sempurna ?

6. (Canadian MO 1978) n adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan n^2 adalah tujuh, apakah angka satuan dari n^2 ?

7. (OSK 2009) Banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ untuk suatu bilangan ganjil x dan y adalah ⋯⋯

8. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang memenuhi a + 2b dan b + 2a keduanya bilangan kuadrat sempurna. Buktikan bahwa a dan b keduanya merupakan kelipatan 3.

9. (Flanders MO 1999 Final Round) Tentukan semua bilangan asli terdiri dari 6 angka, misalkan abcdef, dengan $a \neq 0$ dan $d \neq 0$ yang memenuhi $abcdef = (def)^2$.

10. (Canadian MO 1969) Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan bulat a, b dan c yang memenuhi persamaan $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

11. **abac** adalah bilangan 4 digit yang merupakan kuadrat dari sebuah angka 2 digit. Jika kita naikan semua nilai digit dari **abac** dengan 1 maka bilangan hasil juga merupakan kuadrat dari angka 2 digit yang lain. Berapakah nilai dari a + b + c ?

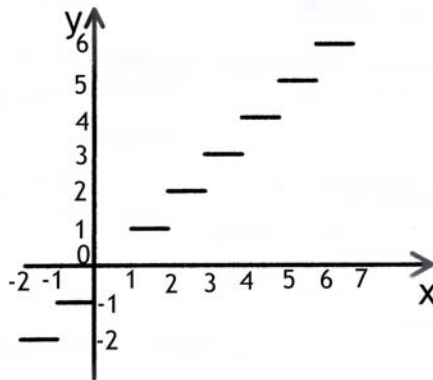
12. (AIME 1999) Tentukan penjumlahan semua $n \in N$ sehingga $n^2 - 19n + 99$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.

13. Buktikan bahwa $2n^{6k} + 4n^{2k} + 11$ tidak mungkin bilangan kuadrat.

14. Tentukan pasangan bilangan bulat positif x dan n yang memenuhi persamaan $x^2 + 615 = 2^n$.

15. (Baltic Way 1994 Mathematical Team Contest) Tentukan semua pasangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $2^a + 3^b$ adalah bilangan kuadrat sempurna.

9. FUNGSI TANGGA DAN CEILING

Perhatikan fungsi y = f(x) = $\lfloor x \rfloor$ dengan tanda $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan α.
Jika x bernilai 3,7 maka y = $\lfloor 3{,}7 \rfloor$ = 3.
Jika x bernilai 4 maka y = $\lfloor 4 \rfloor$ = 4
Jika x bernilai −2,5 maka y = $\lfloor -2{,}5 \rfloor$ = −3
Jika $4 \le x < 5$ maka y = f(x) = 4.
Jika $5 \le x < 6$ maka y = f(x) = 5. Dan seterusnya.
Jika fungsi tersebut digambarkan dalam koordinat kartesian maka

Selain itu ada juga yang disebut fungsi ceiling yang merupakan kebalikan dari fungsi tangga.
Perhatikan fungsi y = f(x) = $\lceil x \rceil$ dengan tanda $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan α.
Jika x bernilai 3,7 maka y = $\lceil 3{,}7 \rceil$ = 4.
Jika x bernilai 4 maka y = $\lceil 4 \rceil$ = 4
Jika x bernilai −2,5 maka y = $\lceil -2{,}5 \rceil$ = −2
Jika $4 \le x < 5$ maka y = f(x) = 5.
Jika $5 \le x < 6$ maka y = f(x) = 6. Dan seterusnya.
Grafik fungsinya pun agak mirip dengan fungsi tangga.

Dari pengertian tersebut akan didapatkan
(i) $(x - 1) < \lfloor x \rfloor \le x$
(ii) $\lfloor x \rfloor \le \lceil x \rceil$.

Tanda kesamaan terjadi hanya saat x adalah bilangan bulat.
Tanda $\lfloor x \rfloor$ dapat digunakan untuk menghitung pangkat tertinggi bilangan prima dari suatu bilangan n! dengan tanda "!" menyatakan faktorial.
Misalkan diketahui n! = 1 x 2 x ⋯ x n dan p suatu bilangan prima. Akan dicari nilai k maksimal sehingga $p^k \mid n!$. Banyaknya bilangan di antara 1, 2, 3, ⋯, n yang merupakan kelipatan prima adalah $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Tetapi $k_{maks} > \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ untuk $p^2 \le n$ sebab masih ada bilangan kelipatan p^2 yang faktornya baru dihitung satu kali. Maka untuk mencari k_{maks} dengan $p^2 \le n$, nilai $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ masih harus ditambahkan dengan $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$. Tetapi nilai $k_{maks} > \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ untuk $p^3 \le n$ sebab masih ada bilangan kelipatan p^3 yang faktornya baru dihitung dua kali. Maka untuk mencari k_{maks} dengan $p^3 \le n$, nilai $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ masih harus ditambahkan dengan $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$.
Demikian seterusnya.
Jadi, nilai $k_{maks} = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$

Contoh 28 :
$\lfloor \sqrt{522007} \rfloor$ sama dengan ⋯⋯⋯

Solusi :
$722^2 = 521284 < 522007$; $723^2 = 522729 > 522007$ maka $\lfloor \sqrt{522007} \rfloor = \lfloor 722,\cdots\cdots \rfloor$
$\lfloor \sqrt{522007} \rfloor = 722$

Contoh 29 :
Bilangan 2010! = 1 · 2 · 3 · ⋯ · 2010 habis dibagi oleh 7^k untuk suatu bilangan asli k tertentu. Tentukan nilai maksimal dari k.

Solusi :
Di antara 2010 bilangan 1, 2, 3, ⋯, 2010 terdapat $\lfloor \frac{2010}{7} \rfloor$ = 287 bilangan yang habis dibagi 7.
Jika k_{maks} = 287 maka akan ada bilangan kelipatan 7^2 yang faktor 7-nya hanya dihitung satu kali. Maka nilai k tersebut haruslah ditambahkan dengan $\lfloor \frac{2010}{7^2} \rfloor$ = 41.
Tetapi faktor 7 dari bilangan kelipatan 7^3 = 343 hanya dihitung dua kali padahal seharusnya tiga kali. Maka hasil sebelumnya harus ditambahkan dengan $\lfloor \frac{2010}{7^3} \rfloor$ = 5. Karena tidak ada bilangan kelipatan 7^4 dari 2010 bilangan tersebut maka perhitungan telah lengkap.

$$k_{maks} = \left\lfloor \frac{2010}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2010}{7^3} \right\rfloor$$

k_{maks} = 333.

LATIHAN 9 :

1. (OSK 2011) Ani mempunyai sangat banyak dadu dengan ukuran 3 cm x 3 cm x 3 cm. Jika ia memasukkan dadu- dadu tersebut ke dalam sebuah kardus dengan ukuran 50 cm x 40 cm x 35 cm maka berapa banyak dadu yang bisa masuk ke dalam kardus tersebut ?

2. (OSK 2003) Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh $\lfloor 4,9 \rfloor$ = 4 dan $\lfloor 7 \rfloor$ = 7. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ = 9 dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor$ = 12, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?

3. (OSK 2007) Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ⋯⋯

4. (OSP 2009) Pada bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak ⋯⋯⋯

5. Angka terakhir dari 26! Pasti 0. Tentukan banyaknya angka 0 berurutan yang terletak pada akhir bilangan 26!. (Maksud soal ini adalah 26! = ⋯⋯0000. Ada berapa banyak angka nol yang terletak pada akhir bilangan tersebut).

6. (AIME 1994) Tentukan bilangan asli n yang memenuhi $\lfloor {}^2\log 1 \rfloor + \lfloor {}^2\log 2 \rfloor + \lfloor {}^2\log 3 \rfloor + \cdots + \lfloor {}^2\log n \rfloor = 1994$.

7. (ARML 2000 Individual) Jika dilihat dari kiri ke kanan 7 digit terakhir dari n! adalah 8000000. Tentukan nilai n. (Ingat n! adalah n faktorial, n! = 1·2·3·4·⋯·(n–1)·n)

8. (COMC 2003) Lambang $\lfloor a \rfloor$ memiliki arti bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan a. Sebagai contoh, $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$, $\lfloor 4 \rfloor = 4$ dan $\lfloor -4,2 \rfloor = -5$. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{x} \right\rfloor = 5$.

9. Tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh adalah $\lfloor 4,2 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Jika M = $\left\lfloor \frac{10^{66}}{10^{33}+3} \right\rfloor$, berapakah sisanya jika M dibagi 1000 ?

10. (OSP 2005) Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari ·····

11. (AIME 1991) Bilangan real x memenuhi $\lfloor x + 0,19 \rfloor + \lfloor x + 0,20 \rfloor + \lfloor x + 0,21 \rfloor + \cdots + \lfloor x + 0,91 \rfloor = 546$. Tentukan nilai dari $\lfloor 100x \rfloor$.

12. Tentukan nilai dari $\left\lfloor \frac{1x2007}{2008} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x2007}{2008} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x2007}{2008} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2007x2007}{2008} \right\rfloor$.

13. Tentukan semua nilai x real yang memenuhi persamaan $\left\lfloor \frac{5+6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x-7}{5}$.

14. (AIME 2002) Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga tidak ada x bulat yang memenuhi $\left\lfloor \frac{2002}{x} \right\rfloor = n$.

15. (OSP 2009) Misalkan $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Nilai $\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah ······

16. (OSP 2010) Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan dengan x. Bilangan asli n sehingga persamaan $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah ······

BAB III
GEOMETRI

1. TRIGONOMETRI

Trigonometri pada bidang geometri ini merupakan alat bantu untuk menyelesaikan suatu persoalan. Rumus-rumus trigonometri yang perlu diingat adalah :

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\cot^2 x + 1 = \mathrm{cosec}^2 x$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\sin (90^o - x) = \cos x$

$\cos (90^o - x) = \sin x$

$\tan (90^o - x) = \cot x$

$\sin (90^o + x) = \cos x$

$\cos (90^o + x) = -\sin x$

$\cos (180^o + x) = -\cos x$

$\tan(180^o + x) = \tan x$

$\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan (x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin \frac{1}{2} x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\cos \frac{1}{2} x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\tan \frac{1}{2} x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \pm\frac{1-\cos x}{\sin x} = \pm\frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$2 \sin x \cos y = \sin (x + y) + \sin (x - y)$

$2 \cos x \sin y = \sin (x + y) - \sin (x - y)$

$2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

$2 \sin x \sin y = -(\cos (x + y) - \cos (x - y))$

Contoh 1 :
Nilai dari sin 15° adalah ……

Solusi :
sin (x − y) = sin x cos y − cos x sin y
sin (45° − 30°) = sin 45° cos 30° − cos 45° sin 30°
sin 15° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$
sin 15° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
Jadi, sin 15° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Contoh 2 :
Tentukan nilai dari cos 105°.

Solusi :
cos (x + y) = cos x cos y − sin x sin y
cos (60° + 45°) = cos 60° cos 45° − sin 60° sin 45°
cos 105° = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$
cos 105° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$
Jadi, cos 105° = $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

Contoh 3 :
Tentukan nilai dari cos 15° sin 75°

Solusi :
cos 15° sin 75° = $\frac{1}{2}$ (sin (15 + 75)° − sin (15 − 75)°)
cos 15° sin 75° = $\frac{1}{2}$ (sin 90° − sin (−60°))
cos 15° sin 75° = $\frac{1}{2}$ (sin 90° + sin 60°)
cos 15° sin 75° = $\frac{1}{4}$ (2 + $\sqrt{3}$)
Jadi, cos 15° sin 75° = $\frac{1}{4}$ (2 + $\sqrt{3}$)

Contoh 4 :
Jika tan 4° = p maka tentukan nilai dari tan 49° dinyatakan dalam p.

Solusi :
tan 49° = tan (45° + 4°)
tan 49° = $\frac{\tan 45^\circ+\tan 4^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 4^\circ}$
Karena tan 45° = 1 maka
tan 49° = $\frac{1+p}{1-p}$
Jadi, tan 49° = $\frac{1+p}{1-p}$

Contoh 5 :
Jika sin A sin B = $\frac{28}{125}$ dan tan A tan B = $\frac{7}{18}$, maka nilai cos (A − B) = ...

Solusi :
tan A tan B = $\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}$

cos A cos B = $\frac{\sin A \sin B}{\tan A \tan B}$ = $\frac{28}{125} \cdot \frac{18}{7}$ = $\frac{72}{125}$

cos (A − B) = cos A cos B + sin A sin B

cos (A − B) = $\frac{72}{125}$ + $\frac{28}{125}$

cos (A − B) = $\frac{4}{5}$

Contoh 6 :
Diberikan segitiga ABC yang siku-siku di C. Jika cos (A + C) = k, maka sin A + cos B = ...

Solusi :
Karena siku-siku di C maka A + B = 90^o.
sin A = sin (90^o − B) = cos B
cos A = cos (90^o − B) = sin B
k = cos (A + C) = cos (A + 90^o) = −sin A
sin A + cos B = sin A + sin A = −2k
Jadi, sin A + cos B = −2k

Contoh 7 :
Diketahui tan x = $\frac{4}{3}$ dan tan y = $\frac{5}{12}$ dengan x dan y adalah sudut lancip. Nilai tan (2x + y) = ...

Solusi :
tan 2x = $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

tan 2x = $\frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}$ = $-\frac{24}{7}$

tan (2x + y) = $\frac{\tan 2x+\tan y}{1-\tan 2x \cdot \tan y}$ = $(-\frac{253}{84})(\frac{7}{17})$

tan (2x + y) = $-\frac{253}{204}$

Contoh 8 :
Hitunglah tan 10^o tan 50^o tan 70^o tanpa menggunakan kalkulator.

Solusi :
tan 10^o tan 50^o tan 70^o = $\frac{\sin 10°(\sin 50° \sin 70°)}{\cos 10°(\cos 50° \cos 70°)}$

tan 10^o tan 50^o tan 70^o = $\frac{\sin 10°(2\cos 20°+1)}{\cos 10°(2\cos 20°-1)}$

tan 10^o tan 50^o tan 70^o = $\frac{2\sin 10° \cos 20°+\sin 10°}{2\cos 10° \cos 20°-\cos 10°}$

tan 10^o tan 50^o tan 70^o = $\frac{\sin 30°-\sin 10°°+\sin 10°}{\cos 30°+\cos 10°-\cos 10°}$

tan 10^o tan 50^o tan 70^o = tan 30^o = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Jadi, tan 10^o tan 50^o tan 70^o = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

LATIHAN 1 :

1. Jika A + B = 45^o dan cos A sin B = $\frac{1}{6}\sqrt{2}$ maka cos (B – A) = ...

2. Diketahui bahwa A, B dan C adalah sudut-sudut dalam segitiga ABC serta berlaku bahwa jumlah sudut-sudut dalam suatu segitiga sama dengan 180^o. Maka buktikan bahwa pada segitiga ABC tersebut berlaku tan A + tan B + tan C = tan A · tan B · tan C.

3. α, β dan γ adalah besar sudut-sudut suatu segitiga. Jika cot α = –3 dan cot β = 1, maka cot γ = ..

4. Buktikan bahwa
   (a) sin 3x = 3 sin x – 4 $\sin^3$x
   (b) cos 3x = 4 $\cos^3$x – 3 cos x

5. cos 75^o + cos 15^o = ...

6. Buktikan bahwa $\frac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x}$ = sec x – sin x.

7. Buktikan bahwa $\frac{\cos 3x - \sin 6x - \cos 9x}{\sin 9x - \cos 6x - \sin 3x}$ = tan 6x.

8. Jika cos A + cos B = cos C, buktikan bahwa cos 3A + cos 3B – cos 3C = –12 cos A cos B cos C.

9. Jika A + B + C = 180^o, buktikan bahwa tan$\frac{1}{2}$ A tan$\frac{1}{2}$ B + tan$\frac{1}{2}$ A tan$\frac{1}{2}$ C + tan$\frac{1}{2}$ B tan$\frac{1}{2}$ C = 1.

10. (AHSME 1999) Misalkan x $\in$ R yang memenuhi sec x – tan x = 2. Nilai dari sec x + tan x adalah ....

11. (OSP 2009/AIME 1986) Jika tan x + tan y = 25 dan cot x + cot y = 30, maka nilai tan (x + y) adalah ......

12. (AIME 1995) Jika (1 + sin t)(1 + cos t) = $\frac{5}{4}$ maka nilai dari (1 – sin t)(1 – cos t) adalah ......

13. Tentukan nilai eksak dari tan 1^o · tan 2^o · tan 3^o · ··· · tan 89^o.

14. (OSK 2005) Nilai $\sin^8 75^o$ – $\cos^8 75^o$ = ...

15. (OSK 2011 Tipe 1) Misalkan A dan B adalah sudut-sudut lancip yang memenuhi
    tan (A + B) = $\frac{1}{2}$ dan tan (A – B) = $\frac{1}{3}$ maka besar sudut A adalah ....

16. (OSK 2008) Diketahui bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga. Jika sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ dan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, maka sin (a + b) = ...

17. (OSP 2011) Jika
$$\left(1-\tan^2 \tfrac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2 \tfrac{x}{2^{2010}}\right)\cdots\left(1-\tan^2 \tfrac{x}{2}\right) = 2^{2011}\sqrt{3}\tan \tfrac{x}{2^{2011}}$$
    maka sin 2x = ...

18. Nilai dari cos $\frac{\pi}{7}$ · cos $\frac{2\pi}{7}$ · cos $\frac{4\pi}{7}$ adalah .....

19. (AIME 1996) Tentukan nilai n bulat positif terkecil yang memenuhi $\tan 19n^o = \frac{\cos 96^\circ + \sin 96^\circ}{\cos 96^\circ - \sin 96^\circ}$.

20. Hitunglah tanpa menggunakan kalkulator

$$\text{cosec } 10^o + \text{cosec } 50^o - \text{cosec } 70^o$$

21. Hitunglah nilai dari $\sin^2 6^o + \sin^2 42^o + \sin^2 66^o + \sin^2 78^o$.

22. (OSP 2009) Jika $x_1, x_2, \cdots, x_{2009}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari

$$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$$

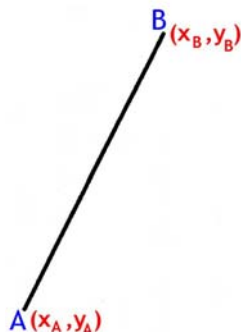
adalah ....

23. Tentukan nilai eksak dari $\sin 18^o$.

2. GARIS

Garis memiliki panjang tak terhingga sedangkan ruas garis dibatasi oleh dua buah titik sebagai ujung-ujung koordinat.

A. Jarak 2 titik

Misalkan AB adalah suatu ruas garis dengan koordinat $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$.

Jarak titik A dan titik B dapat didefinisikan dengan panjang ruas garis lurus yang menghubungkan titik A dengan titik B. Jika ruas garis tersebut diproyeksikan ke sumbu X dan sumbu Y akan didapat bahwa panjang ruas garis tersebut pada arah sumbu X sama dengan $x_B - x_A$ panjang ruas garis tersebut pada arah sumbu Y sama dengan $y_B - y_A$. Karena sumbu X dan sumbu Y tegak lurus maka dengan dalil pitagoras akan didapat

Panjang ruas AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Contoh 9 :

Lingkaran C_1 memiliki pusat di (17, 8) sedangkan lingkaran C_2 memiliki pusat di (10, −16). Maka jarak antarpusat kedua lingkaran tersebut adalah ⋅⋅⋅⋅⋅

Solusi :

Jarak antarpusat = $\sqrt{(17-10)^2 + (8+16)^2}$ = 25.

Jadi, jarak antarpusat kedua lingkaran tersebut sama dengan 25.

B. Kemiringan (Gradien) Garis

Kemiringan garis disebut dengan dengan gradien yang dinotasikan dengan m.

Sebelumnya telah dijelaskan tentang perhitungan proyeksi sebuah ruas garis terhadap sumbu X dan Y. Kemiringan garis dapat didefinisikan dengan perbandingan proyeksi ruas garis terhadap sumbu Y dengan proyeksi ruas garis tersebut terhadap sumbu X.

Jadi, kemiringan garis, m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Dengan memperhatikan bahwa proyeksi ruas garis terhadap sumbu X dan sumbu Y saling tegak lurus serta juga memperhatikan pengertian tangen suatu sudut maka didapat

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

dengan α adalah sudut garis terhadap sumbu X positif. Pengukuran dimulai dari sumbu X positif berlawanan arah jarum jam ke garis dimaksud.

Contoh 10 :

(OSK 2003) Suatu garis melalui titik (m, −9) dan (7, m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m ?

Solusi :

Gradien = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

m = $\frac{m-(-9)}{7-m}$

m + 9 = 7m – m^2

m^2 – 6m + 9 = 0

$(m – 3)^2$ = 0

Jadi, m = 3

C. Persamaan garis

Persamaan dari suatu garis lurus dapat ditentukan jika diketahui sedikitnya satu dari 2 kemungkinan berikut :

a. Jika diketahui 2 titik sebarang yang terletak pada garis

Misalkan diketahui 2 titik dengan koordinat A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2). Persamaan garis tersebut dapat ditentukan dengan menganggap terdapat sebuah titik P(x, y) yang juga terletak pada garis tersebut. Karena berada pada satu garis lurus maka gradien ruas AP dan AB akan sama. Maka

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Dari persamaan tersebut akan dapat ditentukan persamaan garis.

b. Jika diketahui kemiringan garis tersebut serta titik yang terletak pada garis tersebut

Misalkan sebuah garis lurus memiliki kemiringan m serta sebuah titik dengan koordinat A(x_1, y_1) terletak pada garis tersebut. Persamaan garis tersebut dapat ditentukan dengan menganggap terdapat sebuah titik P(x, y) yang juga terletak pada garis tersebut. Berdasarkan pengertian gradien maka

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

Persamaan di atas setara dengan y = mx + c dengan c = y_1 – mx_1. Persamaan y = mx + c dikenal juga dengan persamaan umum garis lurus.

Contoh 11 :

Sebuah garis lurus melalui titik (2, 4) dan (6, 7). Persamaan garis tersebut adalah ····

Solusi :

$\frac{y-4}{x-2}$ = $\frac{7-4}{6-2}$

4(y – 4) = 3(x – 2)

4y – 16 = 3x – 6

4y = 3x + 10

Jadi, persamaan garis tersebut adalah 4y = 3x + 10.

Contoh 12 :

Sebuah garis melalui titik (2, –4) serta sudut garis tersebut terhadap sumbu X positif adalah 45^o. Persamaan garis tersebut adalah ····

Solusi :

Gradien garis = m = tan 45^o = 1.

y + 4 = m(x – 2)

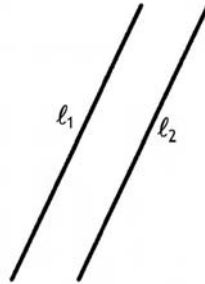
y = x – 6

Jadi, persamaan garis tersebut adalah y = x – 6.

D. Hubungan Gradien 2 Garis

Pada bidang (2 dimensi), hubungan 2 buah garis lurus dapat terjadi dalam 2 kemungkinan : sejajar (termasuk berhimpit) dan berpotongan.

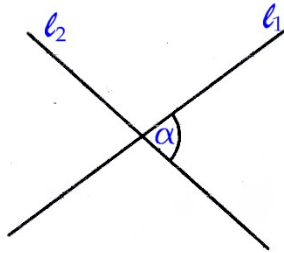
a. Dua buah garis sejajar

Dua buah garis dikatakan sejajar jika tidak memiliki titik persekutuan (sejajar tidak berhimpit) atau memiliki tak berhingga titik persekutuan (berhimpit).

Dua buah garis dikatakan sejajar adalah apabila memiliki kemiringan yang sama.

Jadi, jika garis pertama dengan gradien m_1 dan garis kedua dengan gradien m_2 sejajar maka berlaku

$$m_1 = m_2$$

b. Dua buah garis berpotongan

Dua buah garis lurus dikatakan berpotongan jika terdapat satu buah titik persekutuan.

Gambar di atas menunjukkan bahwa garis ℓ_1 dan ℓ_2 berpotongan.

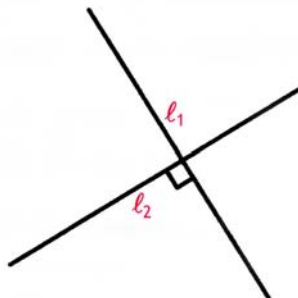
Misalkan sebuah garis memiliki sudut α terhadap sumbu X positif.

Maka kemiringan garis tersebut adalah $m_1 = \tan\theta$.

Jika sebuah garis memotong tegak lurus garis tersebut maka tentunya sudut yang dibentuk garis kedua tersebut terhadap sumbu X positif adalah $90^o + \theta$.

Maka kemiringan garis kedua tersebut adalah $m_2 = \tan(90^o + \theta)$.

$m_2 = \tan(90^o + \theta)$

$m_2 = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{1}{m_1}$

Jadi, syarat dua buah garis berpotongan tegak lurus adalah

$$m_1m_2 = -1$$

Jika dua buah garis berpotongan tidak tegak lurus akan dibahas pada bagian sudut antara dua buah garis.

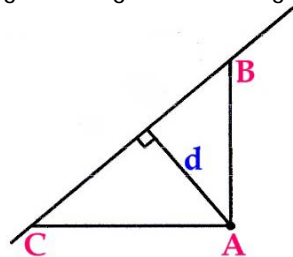
Contoh 13 :
(OSK 2006) Sebuah garis ℓ_1 mempunyai kemiringan −2 dan melalui titik (p, −3). Sebuah garis lainnya ℓ_2, tegaklurus terhadap ℓ_1 di titik (a, b) dan melalui titik (6, p). Bila dinyatakan dalam p, maka a =

Solusi :
Persamaan garis ℓ_1 adalah $y + 3 = -2(x - p)$
Karena ℓ_2 tegak lurus ℓ_1 maka gradien garis ℓ_2 adalah $\frac{1}{2}$.
Persamaan garis ℓ_2 adalah $y - p = \frac{1}{2}(x - 6)$
Kedua garis berpotongan di titik (a, b) maka :
$b + 3 = -2(a - p)$ dan $b - p = \frac{1}{2}(a - 6)$
Eliminasi b pada kedua persamaan didapat $3 + p = -2(a - p) - \frac{1}{2}(a - 6)$
$6 + 2p = -4a + 4p - a + 6$
Jadi, $a = \frac{2}{5}p$

Contoh 14 :
Ketiga garis lurus $ax + 2y + 3 = 0$; $x + y + 1 = 0$ dan $2x + 3y + 4 = 0$ melalui sebuah titik yang sama. Nilai a sama dengan ····

Solusi :
Misalkan titik potong garis $x + y + 1 = 0$ dan $2x + 3y + 4 = 0$ adalah titik $A(x_A, y_A)$.
Subtitusikan $y_A = -1 - x_A$ ke persamaan $2x_A + 3y_A + 4 = 0$ didapat
$2x_A + 3(-1 - x_A) + 4 = 0$ sehingga $x_A = 1$ dan $y_A = -1 - 1 = -2$.
Garis $ax + 2y + 3 = 0$ melalui titik (1, −2) maka
$a(1) + 2(-2) + 3 = 0$
$a = 1$
Jadi, nilai a sama dengan 1.

E. Jarak Titik ke Garis

Jarak antara titik dengan garis ℓ adalah panjang terpendek antara titik tersebut dengan titik -titik yang terletak pada garis ℓ tersebut. Panjang terpendek didapat jika garis yang melalui titik tersebut dengan titik acuan yang terletak pada garis ℓ tegak lurus dengan garis ℓ.

Misalkan terdapat titik $A(x_o, y_o)$ dan sebuah garis $ax + by + c = 0$ dan akan dicari jarak titik A dengan garis tersebut dengan jarak tersebut sama dengan d.

Buat dua garis berturut-turut sejajar sumbu X dan sumbu Y serta memotong garis ax + by + c = 0 di titik C dan B.

Karena koordinat $A(x_o, y_o)$ dan persamaan garis ax + by + c = 0 maka koordinat $B(x_o, \frac{-ax_o-c}{b})$ dan koordinat $C(\frac{-by_o-c}{a}, y_o)$.

Panjang $|AB| = \sqrt{\left(\frac{-ax_o-c}{b} - y_o\right)^2} = \left|\frac{ax_o+by_o+c}{b}\right|$

Panjang $|AC| = \sqrt{\left(x_o - \frac{-by_o-c}{a}\right)^2} = \left|\frac{ax_o+by_o+c}{a}\right|$

Panjang $|BC| = \sqrt{\left(x_o - \frac{-by_o-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{-ax_o-c}{b} - y_o\right)^2} = \frac{|ax_o+by_o+c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$

Dengan luas segitiga mapun perbandingan segitiga akan didapat

$|AB| \cdot |AC| = |BC| \cdot d$

$d = \left|\frac{ax_o+by_o+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

Jadi, jarak titik $A(x_o, y_o)$ ke garis ax + by + c = 0 adalah $d = \left|\frac{ax_o+by_o+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

Contoh 15 :

Sebuah garis lurus dengan persamaan 4y = 3x + 7 menyinggung lingkaran yang berpusat di (2, −3). Tentukan jari-jari lingkaran tersebut.

Solusi :

Persoalan ini sama aja dengan menentukan jarak pusat lingkaran ke garis 4y = 3x + 5.

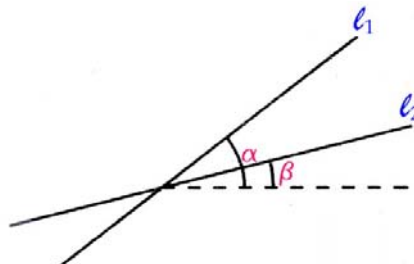
Garis 4y = 3x + 7 setara dengan 3x − 4y + 7 = 0

Jadi, jarak titik (2, −3) ke garis 3x − 4y + 7 = 0 adalah $d = \left|\frac{3(2)-4(-3)+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 5$.

Jadi, jari-jari lingkaran tersebut sama dengan 5.

F. Sudut Antara Dua Garis

Misalkan sudut antara dua garis berpotongan adalah θ, sudut garis pertama terhadap sumbu X positif adalah α dan sudut garis kedua terhadap sumbu X positif adalah β maka

$\theta = \alpha - \beta$

$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Pada penjelasan sebelumnya telah disebutkan bahwa gradien suatu garis sama dengan tangen sudut garis tersebut terhadap sumbu X positif. Maka

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Jika diketahui kemiringan dari kedua garis tersebut maka tentunya θ dapat dihitung.

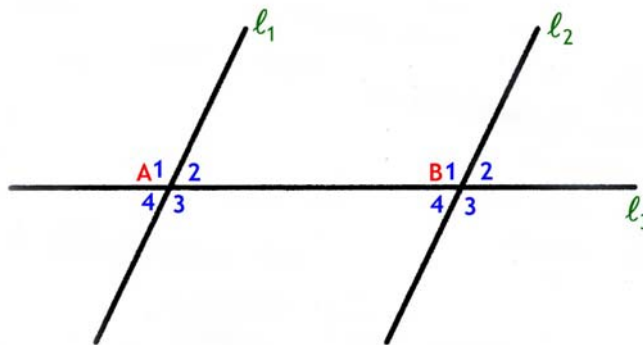
Pada kasus khusus misalkan dua buah garis saling tegak lurus, maka $\theta = 90^o$ sehingga didapat syarat yang memenuhi adalah $1 + m_1m_2 = 0$.

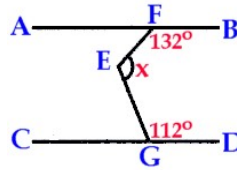
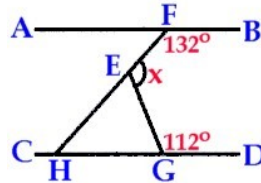
Jadi, syarat dua buah garis tegak lurus adalah
$m_1m_2 = -1$

Contoh 16 :
Sudut terkecil yang dibentuk garis y = –2x + 7 dan garis y = 3x + 2 adalah ·····

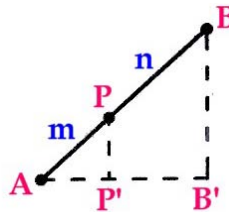
Solusi :
Garis y = 3x + 2 memiliki gradien, $m_1 = 3$
Garis y = –2x + 7 memiliki gradien, $m_2 = -2$
Misalkan sudut antara kedua garis sama dengan θ maka
$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{3-(-2)}{1+(3)(-2)} = -1$
$\theta = 135^o$ sehingga sudut terkecil yang dibentuk kedua garis adalah 45^o.
Jadi, sudut yang dibentuk garis y = –2x + 7 dan garis y = 3x + 2 adalah 45^o.

G. Sudut antara Beberapa Garis

Bagaimana hubungan sudut-sudut di antara beberapa garis ? Diberikan dua buah garis sejajar serta sebuah garis yang memotong kedua garis tersebut.

(i) Dua sudut berpelurus sama dengan 180^o
Sebagai contoh $\angle A_2 + \angle A_3 = 180^o$
(ii) Dua sudut bertolak belakang sama besar
Sebagai contoh $\angle A_1 = \angle A_3$
(iii) Dua sudut yang sehadapan sama besar
Sebagai contoh $\angle A_1 = \angle B_1$
(iv) Dua sudut dalam berseberangan selalu sama besar
Sebagai contoh $\angle A_2 = \angle B_4$
(v) Dua sudut luar berseberangan selalu sama besar
Sebagai contoh $\angle A_1 = \angle B_3$
(vi) Dua sudut dalam sepihak jumlah sudutnya 180^o
Sebagai contoh $\angle A_2 + \angle B_1 = 180^o$
(vii) Dua sudut dalam sepihak jumlah sudutnya 180^o
Sebagai contoh $\angle A_1 + \angle B_2 = 180^o$

Contoh 17 :
(Alabama MC 2002) Ruas AB sejajar dengan ruas CD. Titik F terletak pada ruas AB dan titik G terletak pada ruas CD sedangkan titik E terletak di antara ruas AB dan CD. Diketahui bahwa jumlah sudut dalam suatu segitiga sama dengan 180^o. Jika $\angle EFB = 132^o$ dan $\angle EGD = 112^o$ maka besar $\angle FEG$ sama dengan ······

Solusi :

Misalkan $\angle FEG = x$.
Perpanjang garis FE sehingga memotong ruas CD di H.
$\angle EFA$ berpelurus dengan $\angle EFB$ sehingga $\angle EFA = 180^o - 132^o = 48^o$.
Karena AB sejajar CD maka $\angle GHE = \angle EFA = 48^o$.
$\angle HGE$ berpelurus dengan $\angle EGD$ sehingga $\angle HGE = 180^o - 112^o = 68^o$.
$\angle GEH$ berpelurus dengan $\angle FEG$ sehingga $\angle GEH = 180^o - x$
Jumlah sudut dalam $\Delta EGH = 180^o$ maka
$\angle GHE + \angle HGE + \angle GEH = 180^o$
$(48^o) + (68^o) + (180^o - x) = 180^o$
$x = 116^o$
Jadi, besar $\angle FEG$ sama dengan 116^o.

H. Pembagian Ruas Garis dalam Perbandingan Bagian

Misalkan terdapat ruas garis AB dengan koordinat $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$ dan sebuah titik $P(x_P, y_P)$ yang terletak pada ruas AB sehingga AP : PB = m : n.

Perhatikan bahwa ruas AP dan AB memiliki kemiringan yang sama sehingga jika keduanya diproyeksikan ke sumbu X dan sumbu Y maka perbandingan panjang proyeksi kedua ruas tersebut akan tetap sama dengan semula yaitu m : n.
Jadi, $(x_P - x_A) : (x_B - x_P) = m : n$
$nx_P - nx_A = mx_B - mx_P$
$x_P = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}$
Dengan cara yang sama didapat $y_P = \frac{ny_A + my_B}{m+n}$.
Jadi, jika terdapat ruas garis AB dengan koordinat $A(x_A, y_A)$ dan $B(x_B, y_B)$ dan sebuah titik $P(x_P, y_P)$ yang terletak pada ruas AB sehingga AP : PB = m : n maka koordinat $P(\frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \frac{ny_A + my_B}{m+n})$.

Contoh 18 :
Titik A(2, 4) dan titik B(−4, 12) adalah ujung-ujung diameter suatu lingkaran. Tentukan persamaan lingkaran tersebut

Solusi :

Panjang AB = $\sqrt{(2+4)^2+(4-12)^2}$ = 10

Maka jari-jari lingkaran tersebut, r = 5

Karena AB adalah diameter lingkaran maka pusat lingkaran tersebut terletak di tengah-tengah AB.

Koordinat pusat lingkaran P($\frac{2-4}{2}$, $\frac{4+12}{2}$) = P(−1, 8)

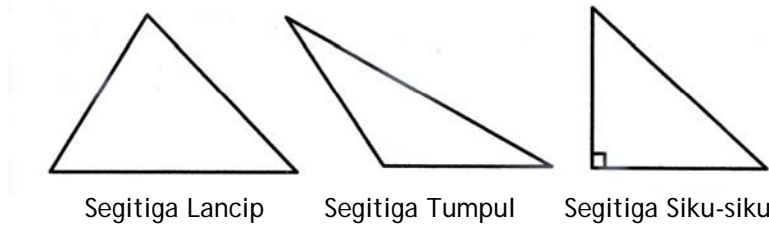
Maka persamaan lingkaran tersebut adalah $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 25$

LATIHAN 2 :

1. Persamaan garis melalui (4,5) dan sejajar dengan garis y + 2x = 4 adalah ······
2. Garis ℓ melalui titik potong garis x + y + 1 = 0 dan 3x + 2y − 1 = 0 serta tegak lurus garis yang menghubungkan titik (8, 5) dan (−4, 7). Persamaan garis ℓ adalah ·····
3. Ditentukan titik P(−3,−2) dan titik Q(7,3). Titik R terletak pada garis PQ sehingga PR : RQ = 3 : 2. Persamaan garis melalui R dan bersudut 45^o terhadap sumbu X positif adalah ······
4. Jika garis g ≡ ax + 2y = 8, garis x − 5y = 10 dan garis 3x + 7y = 8 melalui satu titik yang sama, maka garis g akan memotong sumbu X dengan absis sama dengan ····
5. Jika jarak titik P(3,6) ke garis 12x + 5y − 40 = 0 sama dengan jarak titik P ke titik Q(a, 4), maka nilai a yang memenuhi adalah ······
6. Sebuah persegi (bujur sangkar) dengan sepasang sisinya terletak pada garis 5x − 12y − 65 = 0 dan garis 5x − 12y + 26 = 0. Luas bujur sangkar tersebut adalah ····
7. Garis berat adalah garis yang ditarik dari salah satu titik sudut memotong pertengahan sisi di hadapannya. ABC adalah sebuah segitiga dengan A(2, 0); B(4, 0) dan C(7, 5). Persamaan garis berat segitiga tersebut yang ditarik dari titik C adalah ······
8. (OSP 2007) Titik P terletak di kuadran I pada garis y = x. Titik Q terletak pada garis y = 2x demikian sehingga PQ tegak lurus terhadap garis y = x dan PQ = 2. Maka koordinat Q adalah ·····
9. (OSK 2008) Titik A dan B terletak pada parabola $y = 4 + x - x^2$. Jika titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB, maka panjang AB adalah ·····

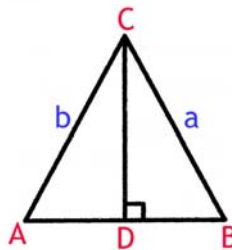
3. SEGITIGA

Segitiga dibentuk dari tiga buah garis lurus dengan tidak ada garis yang sejajar.
Jumlah ketiga sudut dalam segitiga sama dengan 180^o.

Segitiga Lancip Segitiga Tumpul Segitiga Siku-siku

Jika salah satu sudut segitiga ada yang lebih dari 90^o maka disebut segitiga tumpul sedangkan jika tidak ada satupun sudut yang lebih dari 90^o maka disebut segitiga lancip. Segitiga dikatakan siku-siku jika salah satu sudutnya sama dengan 90^o.

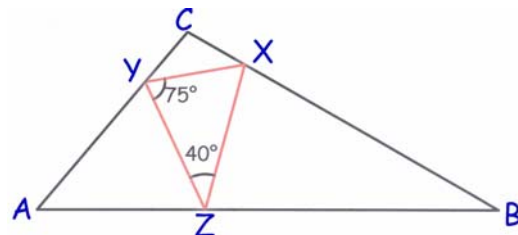
Selain nama-nama tersebut ada juga beberapa segitiga yang perlu untuk dikenal berkaitan dengan panjang sisinya.

a. Segitiga sama sisi.
   Sesuai dengan namanya maka sisi-sisi segitiga sama panjang. Selain itu, ketiga sudut segitiga tersebut juga sama besar yaitu 60^o.

b. Segitiga sama kaki.
   Misalkan ΔABC dengan sisi-sisinya a, b dan c. Segitiga ABC dikatakan sama kaki jika terdapat sepasang sisi misalkan a dan b sehingga a = b. Akibat dari a = b maka $\angle A = \angle B$.

Hal yang penting juga adalah misalkan ΔABC dengan a = b maka sebuah garis dari titik sudut C akan memotong tegak lurus pertengahan sisi c = AB.

Contoh 19 :
Pada segitiga ABC titik-titik X, Y, Z masing-masing terletak pada sisi BC, AC dan AB sehingga AY = AZ, BX = BZ dan CX = CY dengan besar sudut XZY = 40^o dan $\angle ZYX = 75^o$. Besar sudut A adalah ⋅⋅⋅⋅

Solusi :

Misal $\angle AYZ = \alpha$ maka $\angle AZY = \alpha$
Misal $\angle BXZ = \beta$ maka $\angle BZX = \beta$
Misal $\angle CXY = \gamma$ maka $\angle CYX = \gamma$
$\angle YXZ = 180^o - 40^o - 75^o = 65^o$
$\alpha + \gamma = (180 - 75)^o = 105^o$ .... (1)
$\alpha + \beta = (180 - 40)^o = 140^o$ .... (2)
$\beta + \gamma = (180 - 65)^o = 115^o$ .... (3)
Dari ketiga persamaan di atas didapat $\alpha = 65^o$
$\angle A = (180 - 65 - 65)^o = 50^o$
Jadi, besar sudut A adalah 50^o.

A. Dalil Cosinus dan Sinus

Pada setiap segitiga sebarang selalu berlaku dalil cosinus. Misalkan segitiga ABC memiliki sisi-sisi yang panjangnya a, b, c dengan sudut di hadapannya secara berurutan adalah A, B, C, maka berlaku :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Jika salah satu sudut segitiga tersebut siku-siku misalkan di A maka

$a^2 = b^2 + c^2$

yang dikenal dengan dalil pitagoras.

Dari dalil cosinus tersebut akan didapat

- Jika $a^2 > b^2 + c^2$ dengan a adalah sisi terpanjang maka segitiga tersebut adalah segitiga tumpul
- Jika $a^2 < b^2 + c^2$ dengan a adalah sisi terpanjang maka segitiga tersebut adalah segitiga lancip

Pada segitiga ABC tersebut juga berlaku dalil sinus

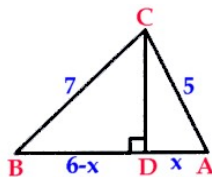
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Dengan R adalah jari-jari lingkaran luar ΔABC.

Dari dalil sinus juga didapat bahwa sisi di hadapan sudut yang terbesar merupakan sisi terpanjang.

Contoh 20 :

Pada segitiga ABC diketahui panjang AC = 5, AB = 6 dan BC = 7. Dari titik C dibuat garis tegak lurus sisi AB memotong sisi AB di titik D. Tentukan panjang CD.

Solusi :

Alternatif 1 :

Misalkan panjang AD = x sehingga BD = 6 − x

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

$5^2 - x^2 = 7^2 - (6 - x)^2$

$24 = 36 - 12x + x^2 - x^2$ sehingga x = 1

$CD^2 = 5^2 - 1^2$

CD = $2\sqrt{6}$

Alternatif 2 :

s = $\frac{1}{2}$(5 + 6 + 7) = 9

Luas ΔABC = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Luas ΔABC = $\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$ = $6\sqrt{6}$

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}$ · AB · CD = 3CD

3 · CD = $6\sqrt{6}$

Jadi, panjang CD = $2\sqrt{6}$.

Contoh 21 :
(OSK 2002) Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC ?

Solusi :
$\angle C = 3\angle A$ dan $\angle B = 2\angle A$
Karena $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ maka
$\angle A + 2\angle A + 3\angle A = 180^o$ sehingga $\angle A = 30^o$
$\angle C = 3\angle A = 90^o$
$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A}$
Jadi, $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2$.

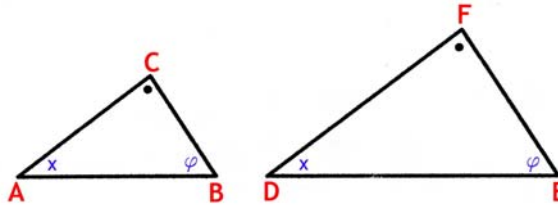
LATIHAN 3.A

1. (OSK 2010) Diberikan segitiga ABC, AB = AC. Jika titik P diantara A dan B sedemikian rupa sehingga AP = PC = CB, maka besarnya sudut A adalah ⋯⋯
2. (NAHC 1995-1996 First Round) Pada segitiga siku-siku diketahui panjang sisi-sisinya adalah a, a + b dan a + 9b untuk suatu bilangan positif a dan b. Tentukan nilai dari $\frac{a}{b}$.
3. (OSK 2003) Segitiga ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 satuan. Melalui B dibuat garis yang tegak lurus BC. Garis tersebut berpotongan dengan perpanjangan garis AC di titik D. Berapakah panjang BD?
4. (OSP 2010) Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah ⋯⋯⋯
5. (OSP 2010) Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika
$$\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$$
Maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah ⋯⋯
6. (OSP 2011) Diberikan persegi panjang (siku empat) ABCD dengan AB = a dan BC = b. Titik O adalah perpotongan antara kedua diagonalnya. Perpanjang sisi BA sehingga sehingga AE = AO, juga perpanjang diagonal DB sehingga BZ = BO. Asumsikan segitiga EZC samasisi. Buktikan bahwa
   i. $b = a\sqrt{3}$
   ii. EO tegak lurus ZD
7. (AIME 1983) Titik A dan C terletak pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari $\sqrt{50}$. Titik B terletak di dalam lingkaran yang memenuhi $\angle ABC = 90^o$, AB = 6 dan BC = 2. Tentukan panjang OB.
8. (AIME 1983/Hongkong PSC 1988) Dua lingkaran yang masing-masing berjari-jari 8 dan 6 mempunyai jarak antar pusat 12. Melalui titik P yang merupakan salah satu titik perpotongan kedua lingkaran dibuat tali busur PQ dan PR dengan Q, P, R segaris. Jika PQ = PR, tentukan PQ^2.

9. (ME V7N1) Tentukan semua kemungkinan sisi-sisi segitiga ABC dengan sisi-sisinya membentuk 3 bilangan bulat berurutan serta $\angle C = 2\angle A$.

10. (Flanders MO 1996 Final Round) Misalkan ABC dan DAC adalah dua buah segitiga sama kaki dengan AB = AC dan AD = DC. Pada ΔABC besar $\angle BAC = 20^o$ sedangkan pada ΔADC berlaku $\angle ADC = 100^o$. Buktikan bahwa AB = BC + CD.

B. Kesebangunan Segitiga

Dua buah segitiga dikatakan sebangun apabila sisi-sisinya memiliki perbandingan yang sama sedangkan segitiga yang memiliki sisi-sisi yang sama dikatakan kongruen (sama dan sebangun).

Dua buah segitiga ABC dan DEF dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat berikut :

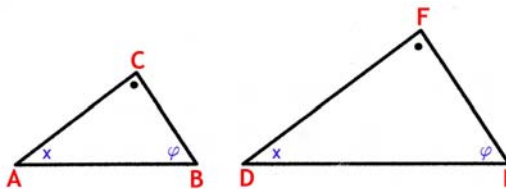
(i) Ketiga sudutnya sama. Dengan kata lain $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ dan $\angle C = \angle F$. Jika diperhatikan syarat sebenarnya hanyalah dua buah sudutnya sama sebab sudut ketiga akan sama jika dua sudut lainnya sama.

(ii) Sisi-sisinya memiliki perbandingan yang sama, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

(iii) Dua sisi memiliki perbandingan yang sama serta sudut yang mengapit kedua sisi tersebut juga sama.
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ dan $\angle A = \angle D$.

Contoh 22 :

Pada segitiga ABC dan segitiga DEF berlaku $\angle BAC = \angle EDF$ dan $\angle ABC = \angle DEF$. Diketahui panjang sisi-sisi AB = 8, AC = 6, DE = 4 dan EF = 6. Jumlah keliling dua segitiga tersebut sama dengan ····

Solusi :

Karena $\angle BAC = \angle EDF$ dan $\angle ABC = \angle DEF$ maka kedua segitiga tersebut sebangun.

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$\frac{8}{4} = \frac{6}{DF}$

DF = 3

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\frac{8}{4} = \frac{BC}{6}$

BC = 12

Keliling ΔABC + keliling ΔDEF = (6 + 8 + 12) + (3 + 4 + 6) = 39

Jadi, jumlah keliling dua segitiga tersebut sama dengan 39.

Contoh 23 :

Segitiga ABC memiliki sisi dengan panjang AB = 16, AC = 12 dan BC = 8 serta $\angle BAC = \alpha$. Segitiga DEF memiliki sisi-sisi yang panjangnya DE = 12, DF = 9 serta $\angle EDF = \alpha$. Panjang EF sama dengan ····

Solusi :

Karena $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{4}{3}$ dan sudut yang mengapit sisi AB dan AC sama dengan sudut yang mengapit sisi DE dan DF sama besar maka ΔABC dan ΔDEF sebangun.

$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{3}{4}$

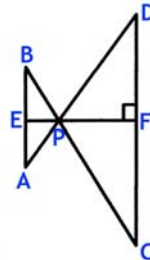
EF = $\frac{3}{4}$ BC = $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$

Jadi, panjang EF = 6

Contoh 24 :

(OSK 2002) Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD ?

Solusi :

Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.

Karena ∠CPD = ∠APB dan AB sejajar dengan CD, maka ΔAPB sebangun dengan ΔCPD.

$\frac{PF}{EP} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$

EP = $\frac{1}{3}$PF ………. (1)

EP + PF = 4

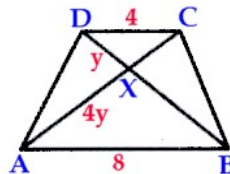
$\frac{1}{3}$PF + PF = 4

Jadi, PF = 3 satuan

Contoh 25 :

Trapesium ABCD dengan AB sejajar DC memiliki panjang AB = 8 dan DC = 4. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik X. Diketahui perbandingan panjang AX dengan XD adalah 4 : 1 dan panjang diagonal AC = 12. Tentukan keliling segitiga CXD.

Solusi :

Misalkan panjang XD = y maka AX = 4y

Karena AB sejajar DC maka ΔABX dan ΔDCX sebangun.

$\frac{AB}{DC} = \frac{AX}{XC} = \frac{BX}{XD}$

$\frac{8}{4} = \frac{4y}{XC} = \frac{BX}{y}$

Didapat bahwa XC = 2y dan BX = 2y

AC = AX + XC = 4y + 2y

12 = 6y sehingga y = 2

XC = 2y = 4 dan XD = y = 2

Keliling segitiga CXD = DC + XD + XC = 4 + 2 + 4 = 10

Jadi, keliling segitiga CXD = 10.

LATIHAN 3.B

1. ABCD adalah persegi panjang dengan AB = 4 dan BC = 3. Tentukan jarak dari titik A ke garis BD.

2. ABCD adalah persegi panjang dengan panjang sisi AB = 16 dan AD = 12. Dari titik D dibuat garis memotong tegak lurus diagonal AC di titik P. Dari titik B juga dibuat garis yang memotong tegak lurus diagonal AC di titik Q. Hitunglah panjang PQ.

3. (Alabama MC 1999) Titik D dan E berturut-turut terletak pada sisi AC dan BC sehingga DE sejajar AB. Panjang AB = 16, DE = 10 dan AD = 6. Panjang DC adalah ⋯⋯

4. Pada sebuah segitiga siku-siku dengan sisi siku-siku 4 dan 6 dibuat setengah lingkaran dengan pusat lingkaran terletak pada hipotenusa dan menyinggung kedua sisi siku-siku segitiga tersebut. Tentukanlah jari-jari lingkaran tersebut ?

5. Pada trapesium ABCD diketahui AB tegak lurus AD dan AB sejajar DC. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik E. Jika panjang CD = 3 dan AB = 6, maka jarak titik E ke AD sama dengan ⋅

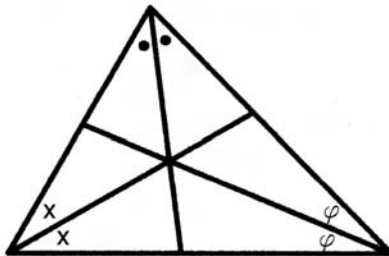
6. Pada jajaran genjang ABCD, E terletak pada sisi BC. Garis DE memotong diagonal AC di titik G. Perpanjangan DE dan perpanjangan AB saling berpotongan di titik F. Jika panjang DG = 6 dan panjang EG = 4, tentukan panjang EF.

7. (OSP 2006) Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa $AE \perp BF$.

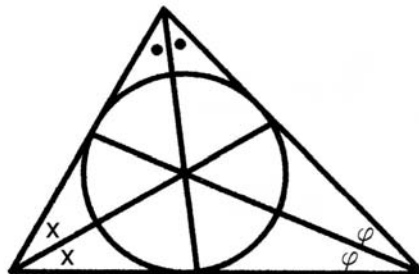
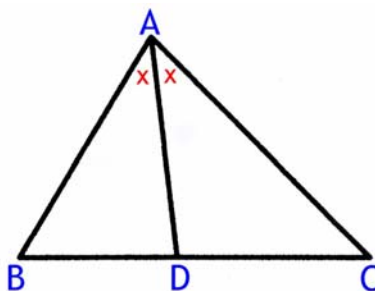
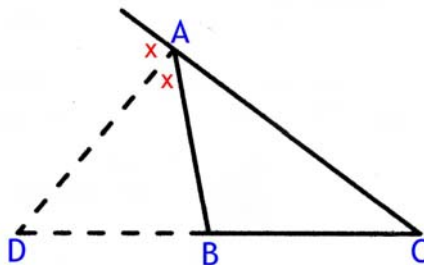
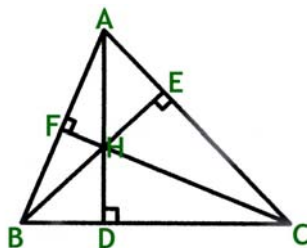
C. Garis-garis pada segitiga

Ada empat garis yang akan dibahas.

a. Garis Bagi.

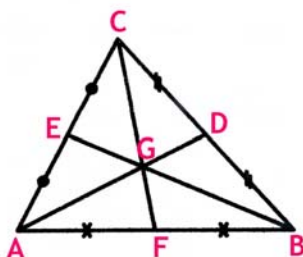
Garis bagi adalah suatu garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan membagi sudut tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.

Sifat-sifat yang berhubungan dengan ketiga garis bagi dalam ΔABC :

(i) Ketiga garis bagi bertemu di satu titik.

(ii) Pertemuan ketiga garis bagi merupakan titik pusat lingkaran dalam ΔABC. Lingkaran dalam segitiga adalah lingkaran yang menyinggung bagian dalam ketiga sisi segitiga.

(iii) Misalkan garis bagi dalam dibuat dari titik A memotong sisi BC di D maka berlaku $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

(iv) Misalkan juga garis bagi luar dibuat dari titik A memotong perpanjangan sisi BC di D maka juga berlaku $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

b. Garis Tinggi.
Garis tinggi adalah suatu garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan memotong tegak lurus sisi di hadapannya.

Sifat-sifat yang berhubungan dengan ketiga garis tinggi dalam ΔABC :

(i) Ketiga garis tinggi bertemu di satu titik.

(ii) Misalkan AD adalah garis tinggi dari ΔABC maka $\angle BDA = \angle CDA = 90^o$.

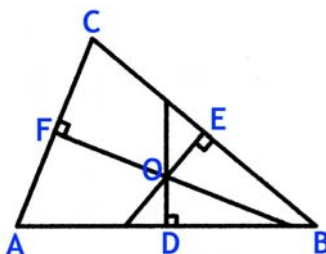
c. Garis Berat.
Garis Berat (disebut juga median) adalah suatu garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan memotong pertengahan sisi di hadapannya.

Sifat-sifat yang berhubungan dengan ketiga garis berat dalam ΔABC :

(i) Ketiga garis berat bertemu di satu titik.

(ii) Perpotongan ketiga garis berat merupakan titik berat ΔABC.

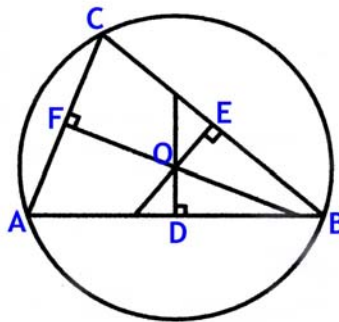
(iii) Misalkan ketiga garis berat (garis AD, BE dan CF) berpotongan di titik G maka berlaku AG : GD = BG : GE = CG : GF = 2 : 1.

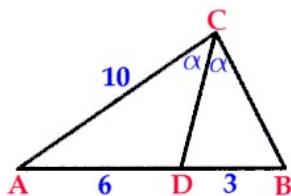
(iv) Misalkan koordinat titik sudut ΔABC adalah $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ dan $C(x_C, y_C)$ maka koordinat titik berat $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

d. Garis Sumbu.
Garis Sumbu adalah suatu garis yang ditarik tegak lurus dari pertengahan salah satu sisi dan memotong sisi di hadapannya.

Pada gambar di atas, titik D, E dan F berturut-turut adalah pertengahan sisi AB, BC dan AC.

Sifat-sifat yang berhubungan dengan ketiga garis sumbu dalam ΔABC :

(i) Ketiga garis sumbu bertemu di satu titik.

(ii) Perpotongan ketiga garis sumbu merupakan pusat lingkaran luar ΔABC.

Contoh 26 :
Dari titik C pada segitiga ABC ditarik garis memotong sisi AB di titik D sehingga AD = 6 dan DB = 3. Jika $\angle$ACD = $\angle$DCB dan AC = 10 maka panjang BC = ·····

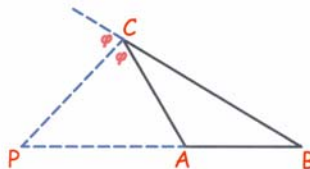
Solusi :

Karena $\angle$ACD = $\angle$DCB maka CD adalah garis bagi sehingga berlaku

$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$

$\frac{10}{BC} = \frac{6}{3}$

Jadi, BC = 5

Contoh 27 :
(OSP 2004 / OSK 2010) Diberikan segitiga ABC dengan perbandingan panjang sisi AC : CB = 3 : 4. Garis bagi sudut luar C memotong perpanjangan BA di P (titik A terletak di antara titik-titik P dan B). Tentukan perbandingan panjang PA : AB.

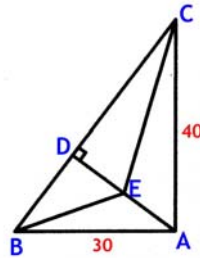
Solusi :
Karena CP adalah garis bagi maka berlaku AC : CB = PA : PB. Maka PA = $\frac{3}{4}$ PB.

PB = PA + AB

$\frac{4}{3}$ PA = PA + AB.

PA = 3 AB

Jadi, perbandingan panjang PA : AB = 3 : 1

Contoh 28 :
(OSK 2009) Diketahui ABC adalah segitiga siku-siku di A dengan AB = 30 cm dan AC = 40 cm. Misalkan AD adalah garis tinggi dari A dan E adalah titik tengah AD. Nilai dari BE + CE adalah ·······

Solusi :
Karena ABC siku-siku di A maka BC = 50 cm.

BD = 30 · $\frac{30}{50}$ = 18 cm sehingga DC = 50 – 18 = 32 cm.

AD = $\frac{30x40}{50}$ = 24 cm

DE = 12 cm

$BE^2 = BD^2 + DE^2 = 18^2 + 12^2 = 6^2 \cdot 13$

$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 32^2 + 12^2 = 4^2 \cdot 73$

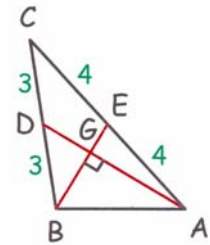
BE + CE = $4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$

Jadi, nilai dari BE + CE adalah $4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$ cm.

Contoh 29 :
AD dan BE adalah garis berat suatu segitiga ABC. Kedua garis berat ini saling tegak lurus. Hitung AB jika AC = 8 dan BC = 6.

Solusi :

Misal G adalah titik berat segitiga
Misal AD = 3x maka AG = 2x dan DG = x
Misal BE = 3y maka BG = 2y dan EG = y
Pada ΔDGB berlaku : $x^2 + (2y)^2 = 9$ sehingga $x^2 + 4y^2 = 9$ .... (1)
Pada ΔEGA berlaku : $y^2 + (2x)^2 = 9$ sehingga $4x^2 + y^2 = 16$ .... (2)
Jumlahkan persamaan (1) + (2) didapat $5x^2 + 5y^2 = 25$ sehingga $x^2 + y^2 = 5$
Pada ΔABG berlaku $(AB)^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 4(x^2 + y^2) = 20$

AB = $2\sqrt{5}$

LATIHAN 3.C

1. (OSK 2010) AB, BC dan CA memiliki panjang 7, 8, 9 berturut-turut. Jika D merupakan titik tinggi dari B, tentukan panjang AD.

2. Pada segitiga ABC diketahui panjang AB = 5, BC = 7 dan AC = 9. Titik D terletak pada AC sehingga panjang BD = 5. Tentukan perbandingan AD : DC.

3. Diketahui ΔABC dengan AC = 2BC = 10 cm. Dari titik C dibuat garis bagi sudut ACB, sehingga memotong AB di titik D. Dibuat garis DE tegak lurus pada AB, sehingga BC = EB. Dari titik D dibuat garis tegak lurus pada EB dan memotong EB di titik F. Jika panjang AD = 8 cm. Hitunglah panjang EF.

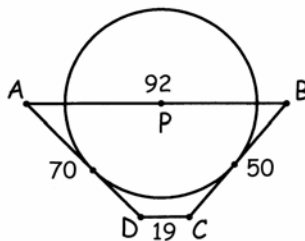
4. Segitiga sama sisi ABC ketiga titik sudutnya terletak pada lingkaran berjari-jari 1. Titik M dan N berurutan adalah pertengahan AC dan BC. Perpanjangan MN memotong lingkaran di titik P dengan panjang NP < MP. Maka panjang NP adalah ......

5. (OSP 2006) Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika AB = AD = 2 dan BD = 1, maka CD = ·····

6. Pada ΔABC, diketahui AB = 5, AC = 6, BC = 4. Titik D terletak pada sisi AB sehingga panjang AD = 2. Dari titik D dibuat garis tegak lurus AC di E dan dibuat sebuah garis lagi dari D tegak lurus BC di titik F. Tentukan nilai DE : DF.

7. (OSP 2011) Diberikan segitiga samakaki ABC dengan AB = AC. Misalkan garis bagi sudut ABC memotong AC di titik D sehingga BC = BD + AD. Besar sudut CAB adalah ······

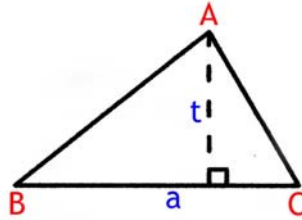
8. (OSK 2009) Diberikan segitiga ABC tumpul ($\angle ABC > 90^o$), AD dan AE membagi sudut BAC sama besar. Panjang segmen garis BD, DE dan EC berturut-turut adalah 2, 3, dan 6. Panjang terpendek dari sisi segitiga ABC adalah ······

9. (AIME 1992) ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar DC, diketahui panjang AB = 92, BC = 50, CD = 19, DA = 70. P adalah sebuah titik yang terletak pada sisi AB sehingga dapat dibuat sebuah lingkaran yang berpusat di P yang menyinggung AD dan BC. Tentukan panjang AP.

10. Titik E terletak pada sisi AB sehingga AE : EB = 1 : 3 dan titik D terletak pada sisi BC sehingga CD : DB = 1 : 2. Garis AD dan CE berpotongan di F. Tentukan nilai dari $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$.

11. Titik M adalah titik tengah sisi BC dari segitiga ABC dengan AM : BC = 3 : 2. Buktikan bahwa garis berat dari titik B dan C saling tegak lurus.

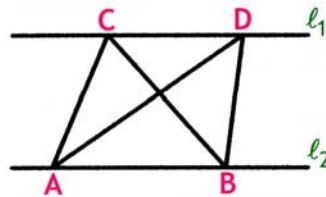
12. Garis tinggi AP, BQ dan CR dari segitiga ABC berpotongan di titik H. Jika panjang AH = BC maka buktikan bahwa PR dan PQ tegak lurus.

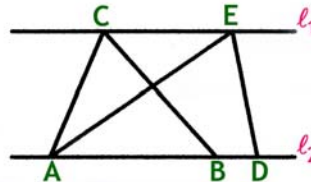
D. Luas Segitiga

a. Diketahui alas dan tinggi segitiga.

Misalkan ΔABC memiliki panjang alas = a dan tinggi = t maka

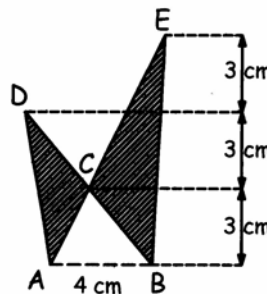
Luas segitiga = [ABC] = $\frac{1}{2}$ at

Dari persamaan di atas akan didapat

(i) Dua buah segitiga yang alas dan tingginya sama panjang akan memiliki luas yang sama.

Sebagai contoh, perhatikan gambar. Garis ℓ_1 dan ℓ_2 adalah dua garis yang sejajar. Akibatnya tinggi ΔABC, ΔABD akan sama. Karena panjang alasnya sama yaitu AB maka ΔABC, ΔABD keduanya memiliki luas yang sama. Sebagai tambahan, misalkan perpotongan kedua segitiga di titik E, maka luas ΔACE = Luas ΔBDE.

(ii) Dua buah segitiga yang alas atau tingginya sama maka perbandingan luasnya berturut-turut dapat dinyatakan sebagai perbandingan tinggi atau alasnya.

Sebagai contoh, perhatikan gambar. Garis ℓ_1 dan ℓ_2 adalah dua garis yang sejajar. Akibatnya tinggi ΔABC, ΔADE akan sama. Maka perbandingan luas ΔABC dan ΔADE dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. Luas ΔABC : Luas ΔADE = panjang AB : AD.

Contoh 30 :

Hitunglah luas daerah yang diarsir

Solusi :

Luas daerah yang diarsir = Luas ΔABD + Luas ΔABE – 2 · Luas ΔABC

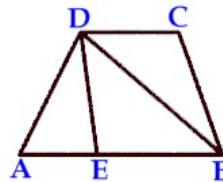
= $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3$

= $(12 + 18 - 12)$ cm^2

= 18 cm^2

Contoh 31 :

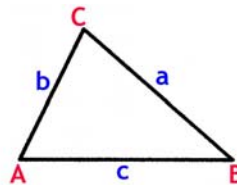
Pada trapesium ABCD sisi AB sejajar DC. Titik E terletak pada sisi AB sehingga AE : EB = 3 : 5. Jika luas segitiga AED = 6 maka luas segitiga ABD sama dengan ·····

Solusi :

Segitiga AED dan segitiga ABD memiliki tinggi yang sama, maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.

[AED] : [ABD] = AE : AB = 3 : 8

[ABD] = $\frac{8}{3}$ [AED] = $\frac{8}{3}$ · 6 = 16

Jadi, luas segitiga ABD sama dengan 16.

b. Diketahui dua sisi dan satu sudut yang mengapit kedua sisi tersebut.

Misalkan ΔABC memiliki sisi-sisi a, b dan c serta titik sudut A, B dan C.

Luas segitiga ABC = [ABC] = $\frac{1}{2}$ ab sin C = $\frac{1}{2}$ ac sin B = $\frac{1}{2}$ bc sin A

Contoh 32 :

(OSP 2002) Segitiga ABC memiliki panjang sisi AB = 10, BC = 7, dan CA = 12. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang terbentuk memiliki luas berapa kali luas ΔABC ?

Solusi :

Luas segitiga semula = $\frac{1}{2}$ ab sin C

Luas segitiga akhir = $\frac{1}{2}$ (3a)(3b)sin C = 9 · $\frac{1}{2}$ ab sin C

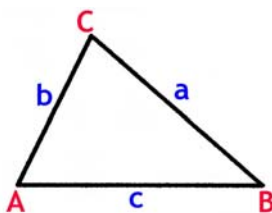
Luas segitiga akhir = 9 · Luas segitiga semula

Jadi, perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah = 9

Berdasarkan contoh 32 kita akan dapatkan fakta bahwa jika dua buah segitiga yang sebangun memiliki perbandingan sisi sama dengan k maka perbandingan luasnya akan sama dengan k^2.

Contoh 33 :
Titik D dan E berturut-turut terletak pada sisi AB dan AC dari suatu segitiga ABC dengan AD : DB = 1 : 2 dan AE : EC = 2 : 3. Jika luas segitiga ABC sama dengan 15 maka luas segitiga ADE adalah ·····

Solusi :
[ADE] = $\frac{1}{2}$ AD · AE sin ∠BAC
[ADE] = $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$AB · $\frac{2}{5}$AC sin ∠BAC
[ADE] = $\frac{2}{15}$ · $\frac{1}{2}$AB · AC sin ∠BAC
[ADE] = $\frac{2}{15}$ [ABC] = $\frac{2}{15}$ · 15 = 2
Jadi, luas segitiga ADE adalah 2.

c. Diketahui ketiga sisi.

Misalkan ΔABC memiliki sisi-sisi a, b dan c
Luas segitiga ABC dapat dihitung dengan menggunakan rumus Heron yaitu

$$\text{Luas segitiga} = [ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dengan s = $\frac{1}{2}$ (a + b + c)

Contoh 34 :
Segitiga ABC memiliki sisi-sisi yang panjangnya 5, 6 dan 7. Luas segitiga ABC tersebut adalah ·····

Solusi :
s = $\frac{1}{2}$ (a + b + c) = $\frac{1}{2}$ (5 + 6 + 7) = 9
Luas segitiga = [ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = $\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$ = $6\sqrt{6}$
Jadi, luas segitiga ABC sama dengan $6\sqrt{6}$

LATIHAN 3.D

1. Pada segitiga ABC diketahui a = 2√2, b = 2√3 dan sudut A = 45°, maka luas segitiga itu adalah ····
2. (Alabama MC 2003) ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar DC. Panjang AB = 12 dan CD = 9. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik X. Diketahui bahwa luas segitiga AXB = 64. Luas segitiga CXD adalah ·····
3. (OSP 2004) Pada sisi-sisi SU, TS dan UT dari ΔSTU dipilih titik-titik P, Q dan R berturut-turut sehingga SP = $\frac{1}{4}$SU, TQ = $\frac{1}{2}$TS dan UR = $\frac{1}{3}$UT. Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas segitiga PQR ?

4. Diketahui koordinat titik A(4,7), B(6,13) dan C(7,9). Berapakah luas segitiga ABC ?

5. (OSP 2009/AIME 1988) Diberikan segitiga ABC dengan tan $\angle CAB = \frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯⋯

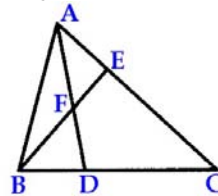
6. (Canadian MO 1969) Misalkan ABC adalah sebuah segitiga dengan sisi-sisinya a, b dan c. Garis bagi yang ditarik dari titik C memotong AB di D. Buktikan bahwa panjang

$$CD = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

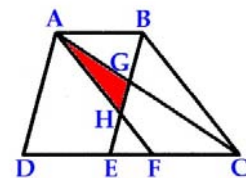
7. (OSP 2008/Hongkong PSC) Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi a, b, dan c. Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC. Besarnya nilai ctg A + ctg B + ctg C adalah ⋯⋯

8. Segi empat ABCD memiliki panjang sisi-sisi AB = 9, BC = 12, CD = 13 dan DA = 14. Panjang diagonal AC adalah 15. Dari titik B dan D dibuat garis tegak lurus AC dan memotong AC berturut-turut di titik P dan Q. Hitunglah panjang PQ.

9. ABCD adalah sebuah persegi panjang dengan luas 1. Diagonal AC dan BD berpotongan di E. Titik F terletak pada pertengahan BC. Jika AF berpotongan dengan diagonal BD di G, maka berapakah luas segitiga AEG ?

10. (OSP 2011) Pada gambar di bawah ini, panjang AE = x, EC = y, dan DC = 2BD. Perbandingan panjang BF dan FE dinyatakan dalam x dan y adalah ⋯⋯⋯⋯

11. (OSN 2004) Buktikan bahwa suatu segitiga ABC siku-siku di C dengan a menyatakan sisi dihadapan sudut A, b menyatakan sisi di hadapan sudut B, c menyatakan sisi di hadapan sudut C memiliki diameter lingkaran dalam = a + b − c.

12. Pada persegi panjang ABCE, titik F dan G terletak pada sisi AB sehingga AF = FG = GB dan titik E merupakan pertengahan sisi DC. Diagonal AC memotong sisi EF di H dan EG di J. Jika luas persegi panjang ABCD sama dengan 70 maka luas segitiga EHJ adalah ⋯⋯

13. (OSN 2011 SMP/MTs) Bangun datar ABCD di samping adalah trapesium dengan AB sejajar CD. Titik E dan F terletak pada CD sehingga AD sejajar BE dan AF sejajar BC. Titik H adalah perpotongan AF dengan BE dan titik G adalah perpotongan AC dengan BE. Jika panjang AB adalah 4 cm dan panjang CD adalah 10 cm hitunglah perbandingan luas segitiga AGH dengan luas trapesium ABCD.

14. (OSN 2009 SMP/MTs) Diketahui segitiga ABC dengan A sebagai puncak dan BC sebagai alas. Titik P terletak pada sisi CA. Dari titik A ditarik garis sejajar PB dan memotong perpanjangan alas di titik D. Titik E terletak pada alas sehingga CE : ED = 2 : 3. Jika F adalah tengah-tengah antara E dan C, dan luas segitiga ABC sama dengan 35 cm^2, berapakah luas segitiga PEF ?

15. (Alabama MC 2003) Pada segitiga ABC, titik E dan F berturut-turut adalah pertengahan AC dan pertengahan BC. Titik H dan I terletak pada ruas AB sehingga AH = HI = IB. Garis IE dan HF berpotongan di J. Jika luas segitiga ABC = 120 maka luas segitiga EFJ adalah ·····

16. (AIME 1988) P adalah titik di dalam segitiga ABC. Perpanjangan PA memotong sisi BC di D, perpanjangan PB memotong sisi AC di E dan perpanjangan PC memotong sisi AB di F. Jika panjang PD = PE = PF = 3 dan PA + PB + PC = 43 tentukan nilai dari PA · PB · PC.

17. (OSK 2006) Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan

18. Pada persegi ABCD dengan panjang sisi 1, titik E pada AB dan titik F pada BC sehingga segitiga DEF adalah segitiga sama sisi. Tentukan luas segitiga DEF.

19. (OSK 2006) Pada segitiga ABC yang tumpul di C, titik M adalah titik tengah AB. Melalui C dibuat garis tegak lurus pada BC yang memotong AB di titik E. Dari M tarik garis memotong BC tegak lurus di D. Jika luas segitiga ABC adalah 54 satuan luas, maka luas segitiga BED adalah ·····

20. Diketahui segitiga siku-siku ABC, sisi AB tegak lurus sisi AC. Panjang AB = 3 dan panjang AC = 4. Titik P terletak di dalam segitiga ABC. Titik D, E dan F masing-masing terletak pada sisi BC, AC dan AB sehingga PD tegak lurus BC, PE tegak lurus AC dan PF tegak lurus AB. Jika $\frac{AB}{PF}+\frac{AC}{PE}+\frac{BC}{PD}=12$, hitunglah panjang PE, PF dan PD.

21. Pada segitiga ABC diketahui panjang sisi-sisinya adalah AB = 13, BC = 14 dan AC = 15. Titik P terletak di dalam segitiga ABC sehingga $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB = \varphi$. Nilai dari tan φ = ······

22. P adalah sebuah titik di dalam segitiga ABC. Tiga buah garis dibuat melalui tiitk P yang sejajar dengan ketiga sisi segitiga ABC. Perpotongan garis-garis tersebut dengan sisi-sisi segitiga membentuk segitiga kecil. Luas ketiga segitiga tersebut adalah p^2, q^2 dan r^2. Buktikan bahwa luas segitiga ABC adalah $(p + q + r)^2$.

23. S adalah titik yang terletak di dalam segitiga ABC sehingga luas ΔSAB, ΔSBC dan ΔSCA sama. Tunjukkan bahwa S adalah titik berat segitiga ABC.

24. (Flanders MO 2001 Final Round) Pada segitiga ABC titik D dan E berturut-turut terletak pada sisi AC dan BC. Garis BD dan AE berpotongan di titik F. Misalkan [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ. Jika [ADF] = 4, [ABF] = 8 dan [BEF] = 7 maka tentukan luas daerah CDFE.

E. Hubungan antara luas segitiga dengan jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar segitiga

Ada hubungan antara luas segitiga dengan jari-jari lingkaran dalam dan jari-jari lingkaran luar.

Luas segitiga ABC = [ABC] = $\frac{1}{2}$r(a + b + c) = rs

Luas segitiga ABC = [ABC] = $\frac{abc}{4R}$

Sebagai bahan pembelajaran, silakan Pembaca membuktikan kedua rumus di atas dengan menggunakan rumus-rumus luas yang ada ditambah dengan rumus-rumus yang lainnya.

Contoh 35 :
(OSK 2004) Jika luas segitiga ABC sama dengan kelilingnya, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah ····

Solusi :
Misal jari-jari lingkaran dalam sama dengan r dan ketiga sisinya adalah a, b dan c, maka :
Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ r (a + b + c)
Luas segitiga = $\frac{1}{2}$ r · Keliling segitiga
Karena luas segitiga sama dengan keliling segitiga maka r = 2
Jadi, jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah 2.

Contoh 36 :
(Alabama MC 1999) ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi 12. Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC tersebut adalah ·····

Solusi :
Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan c dengan a = b = c = 12.
[ABC] = $\frac{1}{2}$ r (a + b + c)
$\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \sin 60^o = \frac{1}{2} r \cdot (12 + 12 + 12)$
r = 2√3
Jadi, jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC tersebut adalah 2√3.

LATIHAN 3.E

1. Jika r dan R menyatakan jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga yang panjang sisi-sisinya adalah 5, 6 dan 7 maka tentukan nilai dari hasil kali rR.

2. (OSK 2008) Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah

3. (OSP 2009) Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c serta a < b < c. Misalkan r dan R berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya. Jika $\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$ maka nilai dari $\frac{r}{a+b+c}$ adalah ········

F. Ketaksamaan Segitiga

Pada setiap segitiga haruslah berlaku bahwa panjang setiap sisi selalu kurang dari jumlah panjang dua sisi yang lain.

Misalkan panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah a, b dan c maka berlaku

$$a < b + c \quad ; \quad b < a + c \quad \text{dan} \quad c < a + b$$

Contoh 37 :

Ada berapa banyak nilai n bulat jika 5, 6 dan n + 4 merupakan sisi-sisi suatu segitiga ?

Solusi :

* Misalkan 6 adalah sisi terpanjang maka $6 < 5 + n + 4$ akan didapat $n > -3$
  Selain itu $n + 4 \leq 6$ sehingga $n \leq 2$.
  Nilai n yang memenuhi adalah −2, −1, 0, 1, 2
* Misalkan n + 4 adalah sisi terpanjang maka $n + 4 < 5 + 6$ akan didapat $n < 7$
  Selain itu $n + 4 \geq 6$ sehingga $n \geq 2$
  Nilai n yang memenuhi adalah 2, 3, 4, 5, 6

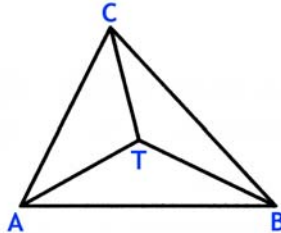
Jadi, nilai n yang memenuhi adalah −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Jadi, banyaknya nilai n yang memenuhi ada 9.

Contoh 38 :

Misalkan titik T terletak pada segitiga ABC. Buktikan bahwa

$$TA + TB + TC > \tfrac{1}{2} \text{ Keliling } \Delta ABC$$

Solusi :

Berdasarkan ketaksamaan segitiga maka

Pada ΔTAB berlaku $TA + TB > AB$ .... (1)

Pada ΔTAC berlaku $TA + TC > AC$ .... (2)

Pada ΔTBC berlaku $TB + TC > BC$ .... (1)

Jumlahkan ketiga persamaan (1), (2) dan (3) maka

$2(TA + TB + TC) > AB + AC + BC$

$TA + TB + TC > \tfrac{1}{2}$ Keliling ΔABC (terbukti)

Contoh 39 :

(OSK 2007) Keliling sebuah segitiga adalah 8. Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat, maka luas segitiga tersebut sama dengan

Solusi :

$a + b + c = 8$ dengan a, b, dan c semuanya bilangan asli.

Kombinasi tripel (a,b,c) yang mungkin adalah (6,1,1), (5,2,1), (4,3,1), (4,2,2), (3,3,2).

Syarat : panjang salah satu sisi selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain.

Yang memenuhi $a < b + c$ hanya tripel (a,b,c) = (3,3,2)

s = $\frac{1}{2}$(a + b + c) = 4

Dengan rumus Heron, Luas Δ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ = $2\sqrt{2}$

Luas Δ = $2\sqrt{2}$

LATIHAN 3.F :

1. (OSP 2009) Banyaknya segitiga tumpul dengan sisi bilangan asli yang memiliki sisi-sisi terpanjang 10 adalah ·····

2. (OSP 2009) Diberikan segitiga dengan panjang dari ketiga garis tinggi segitiga itu merupakan bilangan bulat. Jika panjang kedua garis tingginya adalah 10 dan 6, maka panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah ······

3. (OSP 2006) Pada segitiga ABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C saling berpotongan tegak lurus. Nilai minimum ctg B + ctg C adalah ·····

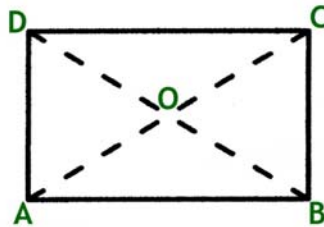
4. Bujur sangkar ABCD memiliki sisi yang panjangnya a dan diagonal yang panjangnya d. Segitiga APQ dibuat sedemikian sehingga titik P pada sisi BC dan Q pada sisi AB dengan DP = DQ. Jika keliling segitiga DPQ = k, buktikan bahwa 2d < k < 4a.

5. Panjang sisi-sisi suatu segi empat merupakan bilangan asli. Panjang masing-masing sisi membagi jumlah panjang ketiga sisi yang lain. Buktikan bahwa terdapat sedikitnya dua sisi dengan panjang yang sama.

6. (OSP 2009) Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi AC. Misalkan r_1, r_2 dan r berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga-segitiga ABD, BCD, dan ABC. Buktikan bahwa $r_1 + r_2 > r$.

4. SEGIEMPAT

Ada beberapa bangun segiempat dalam dua dimensi yang akan dibahas.

a. Persegi Panjang.

Sifat-sifat persegi panjang :

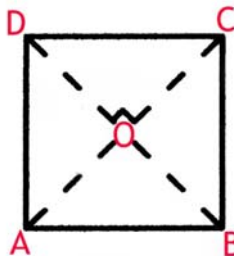
(i) Dua sisi berhadapan sejajar.
Dari gambar didapat $AB \parallel DC$ dan $AD \parallel BC$.

(ii) Dua buah sisi berhadapan sama panjang.
AB = DC dan AD = BC.

(iii) Masing-masing keempat titik sudut sama dengan 90^o.
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$.

(iv) Kedua diagonal berpotongan dan saling membagi dua sama panjang.
AO = OC = BO = OD.

Misalkan persegi panjang memiliki sisi yang panjangnya p dan l maka berlaku
Keliling persegi panjang = 2(p + l)
Luas persegi panjang = $p \cdot l$

b. Persegi.

Sifat-sifat persegi :

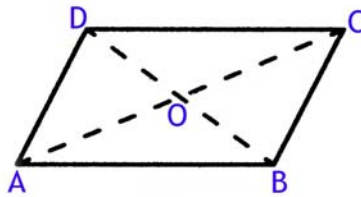
(i) Dua sisi berhadapan sejajar.
Dari gambar didapat $AB \parallel DC$ dan $AD \parallel BC$.

(ii) Keempat sisi sama panjang.
AB = DC = AD = BC.

(iii) Masing-masing keempat titik sudut sama dengan 90^o.
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^o$.

(iv) Kedua diagonal saling tegak lurus.
AC tegak lurus BD.

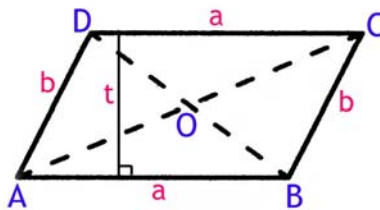
(v) Kedua diagonal sama panjang dan saling membagi dua sama panjang.
AC = BD dan AO = OC = BO = OD.

Misalkan persegi memiliki sisi yang panjangnya s maka berlaku
Keliling persegi = 4s
Luas persegi = s^2

c. Jajaran Genjang.

Sifat-sifat jajaran genjang :

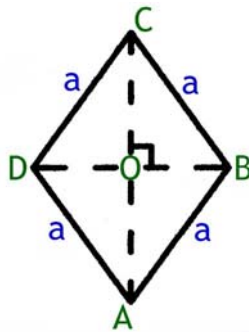
(i) Dua sisi berhadapan sejajar dan sama panjang.
Dari gambar didapat AB ∕∕ DC dan AD ∕∕ BC serta AB = DC dan AD = BC.

(ii) Sudut yang berhadapan sama besar.
$\angle BAD = \angle BCD$ dan $\angle ADC = \angle ABC$.

(iii) Kedua diagonal saling membagi dua sama panjang.
AO = OC dan BO = OD.

Misalkan jajaran genjang memiliki sisi yang panjangnya a dan b serta jarak dua sisi sejajar a sama dengan t maka berlaku

Keliling jajaran genjang = 2(a + b)

Luas jajaran genjang = $a \cdot t$

d. Belah Ketupat.

Sifat-sifat belah ketupat :

(i) Dua sisi berhadapan sejajar.
Dari gambar didapat AB ∕∕ DC dan AD ∕∕ BC.

(ii) Semua sisi sama panjang.
AB = DC = AD = BC.

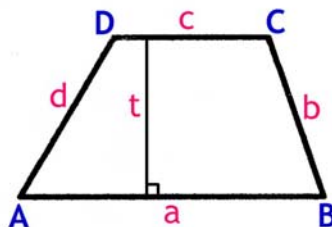
(iii) Sudut yang berhadapan sama besar.
$\angle BAD = \angle BCD$ dan $\angle ADC = \angle ABC$.

(iv) Kedua diagonal berpotongan tegak lurus dan saling membagi sama panjang.
AO = OC dan BO = OD.

Misalkan belah ketupat memiliki sisi-sisi yang panjangnya a serta panjang kedua diagonalnya d_1 = AC dan d_2 = BD maka berlaku

Keliling belah ketupat = 4a

Luas belah ketupat = $\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

e. Trapesium.

Sifat-sifat trapezium :

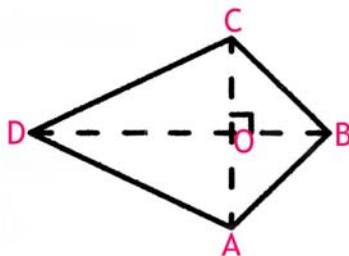
(i) Memiliki tepat sepasang sisi yang sejajar.
Dari gambar didapat $AB \parallel DC$.

(ii) Sudut antara dua sisi sejajar sama dengan 180^o.
$\angle BAD + \angle ADC = 180^o$ dan $\angle ABC + \angle BCD = 180^o$.

Misalkan trapesium memiliki sisi-sisi yang panjangnya a, b, c dan d dengan a dan c sejajar serta jarak dua sisi sejajar sama dengan t maka berlaku

Keliling trapesium = a + b + c + d

Luas trapesium = $\frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot t$

f. Layang-layang.

Sifat-sifat layang-layang :

(i) Memiliki dua pasang sisi sama panjang.
AB = BC dan AD = CD.

(ii) Kedua diagonal berpotongan tegak lurus.
Diagonal $BD \perp AC$.

(iii) Diagonal terpanjang membagi diagonal terpendek sama panjang.
Diagonal terpanjang adalah BD sehingga AO = OC.

Misalkan layang-layang memiliki sisi-sisi yang panjangnya AB = BC = a dan AD = CD = b serta panjang kedua diagonalnya d_1 = AC dan d_2 = BD maka berlaku

Keliling layang-layang = 2(a + b)

Luas belah ketupat = $\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

Contoh 40 :

(OSK 2005) Diberikan dua buah persegi, A dan B, dimana luas A adalah separuh dari luas B. Jika keliling B adalah 20 cm, maka keliling A, dalam centimeter, adalah ....

Solusi :

Luas B = 2 Luas A, maka B = 2A

Misalkan panjang sisi A = x dan panjang sisi B = y maka

Luas B = $y^2 = 2x^2$ sehingga $y = x\sqrt{2}$

Keliling B = 4y.

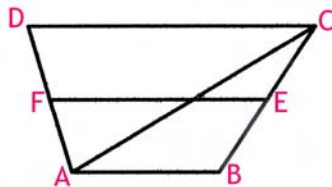
Maka $4x\sqrt{2} = 20$ sehingga $x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Keliling A = $4x = 10\sqrt{2}$

Jadi, keliling A = $10\sqrt{2}$ cm

Contoh 41 :

(OSK 2008) Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah $\frac{1}{3}$. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah

Solusi :

ΔABC dan ΔACD memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luas keduanya dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.

AB : DC = 1 : 3

Misalkan panjang sisi AB = x maka panjang sisi DC = 3x.

E adalah pertengahan BC dan F pertengahan DA sehingga FE sejajar AB dan DC.

Maka FE = $\frac{1}{2}(x + 3x) = 2x$

Misalkan tinggi trapesium = t.

Luas ABEF = $\frac{(AB+FE)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3tx}{4}$

Luas EFDC = $\frac{(FE+DC)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{5tx}{4}$

Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC = 3 : 5.

Jadi, rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah $\frac{3}{5}$.

LATIHAN 4 :

1. (OSK 2007) Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian,dengan perbandingan panjang 3 : 2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah

2. (Alabama MC 1999) Sebuah belah ketupat memiliki sisi yang panjangnya 10. Salah satu sudut dalam belah ketupat tersebut besarnya sama dengan 60^o. Panjang diagonal terpendek belah ketupat tersebut adalah ⋯⋯

3. (OSP 2003) Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut : Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah x, berapakah luas persegi PQRS ?

4. (OSP 2005) Misalkan ABCD adalah sebuah trapesium dengan BC$\parallel$AD. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah ⋯⋯

5. (OSK 2007) Diketahui empat titik pada bidang dengan koordinat A(1,0), B(2008,2007), C(2007,2007), D(0,0). Luas jajaran genjang ABCD sama dengan ⋯⋯

6. ABC adalah segitiga siku-siku dengan AB adalah hipotenusa. Panjang AC = 6 dan BC = 8. Bangun ABLH adalah persegi (bujur sangkar) dengan titik C tidak terletak di dalam persegi tersebut. Luas segiempat CBLH adalah ⋯⋯⋯

7. Pada suatu jajaran genjang, dua diagonalnya membentuk sudut 60^o. Panjang sisi-sisinya adalah 6 dan 8. Luas jajaran genjang tersebut adalah

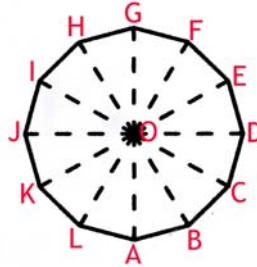
8. ABCD adalah trapesium dengan AB sejajar CD. Diagonal AC dan BD berpotongan di titik O. Luas segitiga AOB = 99^2 sedangkan luas segitiga COD = 19^2. Tentukan luas trapesium tersebut.

9. Titik E dan F secara berurutan terletak pada sisi AB dan CD suatu persegi panjang ABCD sehingga DFBE adalah belah ketupat. Jika AB = 16 dan BC = 12, maka panjang EF sama dengan ⋯⋯⋯

10. (OSP 2004/Hongkong PSC 1988) Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut ?

11. (Bulgarian MO 1995 : Spring MC Grade 8) Misalkan M adalah titik tengah sisi BC pada jajaran genjang ABCD sedangkan N adalah perpotongan AM dan diagonal BD. Perpanjangan DA dan CN berpotongan di titik P.
    a. Buktikan bahwa AP = AD
    b. Jika AB = AC maka buktikan CP = BD

5. SEGI-N BERATURAN

Segi-n beraturan adalah suatu bangun datar yang memiliki sisi sebanyak n dan panjang semua sisinya sama.

Gambar di atas adalah contoh segi-n beraturan yaitu segi-12 beraturan.
Misalkan panjang sisi suatu segi-n beraturan adalah s maka

Keliling segi-n beraturan = n · s

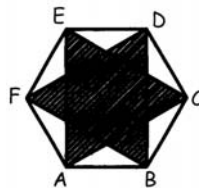
Bagaimana caranya menghitung luas ?
Segi-n beraturan dapat dibagi menjadi n buah segitiga sama kaki dengan salah satu sisi panjangnya s dan dua sisi yang lain sama panjang.
Karena satu putaran = 360^o maka besarnya sudut pada segitiga di hadapan sisi s besarnya dapat dihitung yaitu = $\frac{360^\circ}{n}$.
Karena salah satu satu sisi diketahui dan sudut di hadapan sisi tersebut diketahui serta dua sisi yang lain sama panjang maka luas segitiga tersebut dapat dihitung.

Luas segi-n beraturan = n · Luas segitiga

LATIHAN 5 :

1. (OSK 2004) Pada sebuah segi6 beraturan, rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah

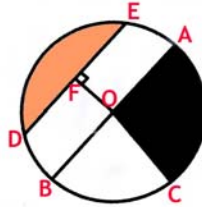
2. (OSP 2005) Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ····

3. Diketahui bahwa ABCDEF adalah segienam beraturan. Tentukan perbandingan luas segienam beraturan ABCDEF dengan luas daerah diarsir.

4. ABCDEFGH adalah segidelapan beraturan dengan penyusunan huruf disusun berlawanan arah jarum jam. Diketahui koordinat A(0, 4), B(4, 0) dan E(p, q). Maka p – q = ····

6. LINGKARAN

Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu, yaitu pusat lingkaran.

Jadi ada dua hal yang sangat berkaitan dengan lingkaran yaitu jari-jari lingkaran, R, dan pusat lingkaran.

Unsur-unsur pada lingkaran dapat dilihat pada gambar berikut.

a. Titik O disebut sebagai pusat lingkaran
b. OA, OB, OD, OE disebut sebagai jari-jari lingkaran
c. Ruas garis lurus AB yang melalui pusat lingkaran disebut diameter lingkaran
d. Ruas garis DE disebut tali busur
e. Garis lengkung DE dan AC disebut busur lingkaran
f. Daerah arsiran yang dibatasi dua jari-jari (pada gambar dibatasi OA dan OC serta berwarna hitam) disebut juring
g. Daerah yang dibatasi talibusur DE dan busur DE disebut tembereng
h. Garis OF yang tegak lurus DE disebut apotema

Misalkan r adalah jejari lingkaran dan d adalah diameter lingkaran dengan d = 2r

Luas lingkaran = $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$.

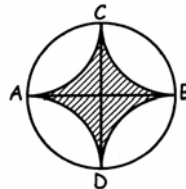
Keliling Lingkaran = $2\pi r$

Luas Juring = $\frac{360^\circ}{n} \cdot \pi r^2$ dengan n adalah sudut pusat diukur dalam derajat.

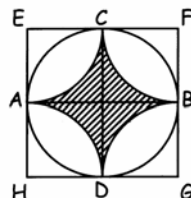
Panjang Busur = $\frac{360^\circ}{n} \cdot 2\pi r$

Luas tembereng DE = Luas Juring ODE − Luas ΔODE

Contoh 42 :

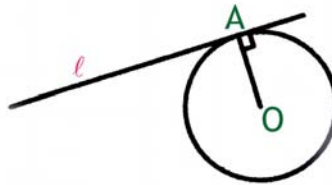
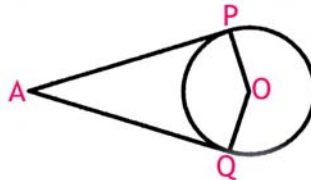
Perhatikan gambar. AB dan CD adalah diameter lingkaran dengan AB = CD = 8 serta AB dan CD saling tegak lurus. Busur AC, CB, BD dan DA adalah 4 busur yang kongruen dengan dua busur yang berdekatan saling bersinggungan. Tentukan luas daerah yang diarsir.

Solusi :

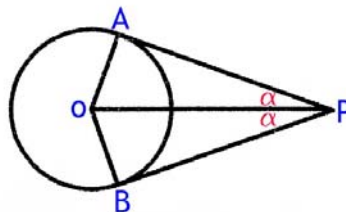
Alternatif 1 :

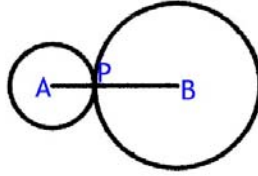
Buat persegi EFGH dengan A, B, C dan D adalah pertengahan sisi-sisinya.

$\text{Luas}_{\text{arsir}} = \text{Luas}_{\text{persegi EFGH}} - 4 \cdot \text{Luas}_{1/4\text{ lingkaran}}$
$\text{Luas}_{\text{arsir}} = 8 \cdot 8 - 4\ (\frac{1}{4}\ \pi\ 4^2)$
$\text{Luas}_{\text{arsir}} = 64 - 16\pi$

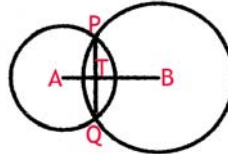
Alternatif 2 :
Misal perpotongan garis AB dan CD di titik O
$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = \text{Luas}_{1/4\text{ lingkaran}} - \text{Luas } \Delta AOC$
$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$
$\text{Luas}_{\text{tembereng AC}} = 4\pi - 8$
Luas arsir = Luas lingkaran – 8 · Luas tembereng
Luas arsir = $\pi \cdot 4^2 - 8 \cdot (4\pi - 8)$
Luas arsir = $64 - 16\pi$

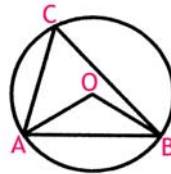
Dalam pembahasan berikut ini, Penulis tidak menjelaskan persamaan lingkaran, tetapi lebih mengedepankan kepada dalil-dalil yang berhubungan dengan lingkaran.

(a) *Misalkan garis ℓ menyinggung lingkaran yang berpusat di O pada titik A maka OA akan tegak lurus garis ℓ.*

(b) *Misalkan titik A terletak di luar lingkaran L maka dari titik A dapat dibuat dua buah garis singgung yang jaraknya terhadap titik singgungnya sama panjang.*

Titik A terletak di luar lingkaran. Dari A dibuat dua garis yang menyinggung lingkaran di titik P dan Q maka panjang AP = AQ.

(c) *Misalkan titik P terletak di luar lingkaran L yang berpusat di O dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran di titik A dan B. Maka $\angle APO = \angle BPO$.*

Berdasarkan kesimetrian akan didapat $\angle APO = \angle BPO$.

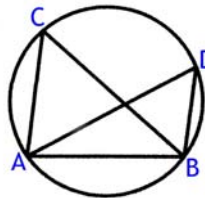
(d) *Sebuah lingkaran berpusat di A menyinggung di luar sebuah lingkaran berpusat di B pada titik P. Maka A, P dan B berada pada satu garis lurus.*

Buat garis singgung melalui titik P. Maka garis singgung tersebut akan tegak lurus AP dan PB berakibat AP dan PB akan sejajar. Jadi, A, P dan B berada pada satu garis lurus.

(e) *Garis yang menghubungkan pusat dua lingkaran akan memotong tegak lurus pertengahan talibusur persekutuannya.*

Misalkan lingkaran yang berpusat di A berpotongan di titik P dan Q dengan lingkaran yang berpusat di B. Maka AB akan berpotongan tegak lurus dengan PQ di titik T yang merupakan pertengahan PQ.

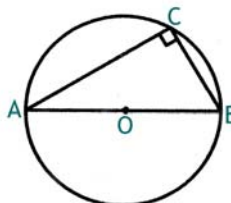
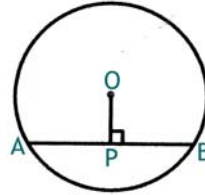
(f) *Besar sudut pusat sama dengan dua kali sudut keliling.*

Misalkan AB adalah talibusur dan O pusat lingkaran. Maka $\angle AOB$ disebut sebagai sudut pusat. Misalkan juga titik C terletak pada lingkaran tersebut, maka $\angle ACB$ disebut sudut keliling.
Hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling tersebut adalah

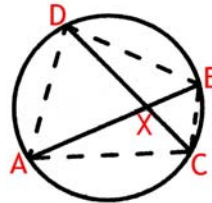
$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

Berlaku juga bahwa jika $\angle AOB = 2\ \angle ACB$ maka dapat dibuat sebuah lingkaran melalui A, B dan C serta berpusat di O.

(g) *Besar sudut keliling yang menghadap talibusur yang sama akan sama besar.*

Misalkan AB adalah talibusur dan titik C dan D terletak pada lingkaran. Maka

$$\angle ACB = \angle ADB$$

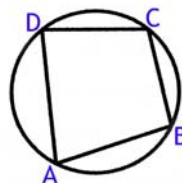
(h) *Misalkan AB adalah diameter suatu lingkaran dan C terletak pada lingkaran tersebut, maka berlaku* $\angle ACB = 90^o$

(i) *Misalkan AB adalah talibusur suatu lingkaran yang berpusat di O dan titik P adalah pertengahan AB maka OP akan tegak lurus AB*

Karena O adalah pusat lingkaran maka OA = OB = jari-jari lingkaran. Jadi ΔAOB adalah segitiga sama kaki. Karena OAB segitiga sama kaki maka garis dari O akan memotong tegak lurus pertengahan sisi AB.

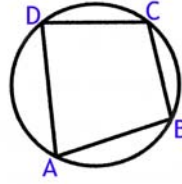
(j) *Misalkan dua talibusur AB dan CD pada satu lingkaran saling berpotongan di titik X maka berlaku AX · XB = CX · XD. Berlaku sebaliknya, jika dua buah garis AB dan CD berpotongan di titik X dan memenuhi AX · XB = CX · XD maka keempat titik A, B, C dan D terletak pada satu lingkaran.*
Perhatikan gambar.

Dari hubungan garis didapat bahwa ∠AXD = ∠CXB
Perhatikan bahwa ruas AC juga merupakan talibusur sehingga dari dalil sebelumnya maka ∠ADC = ∠ABC.
Dengan cara yang sama akan didapat bahwa ∠BAD = ∠BCD.
Karena ketiga sudut ΔADX dan ΔBCX sama maka kedua segitiga tersebut sebangun. Akibatnya berlaku $\frac{AX}{XD} = \frac{CX}{XB}$ sehingga

$$AX \cdot XB = CX \cdot XD$$

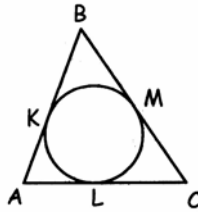
Berlaku kebalikannya.

(k) *Misalkan titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran dengan AC dan BD adalah kedua diagonal.Maka berlaku :*

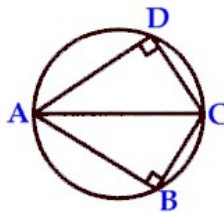
$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Persamaan di atas dikenal dengan dalil Ptolomeus.

(l) *Pada segiempat talibusur, jumlah sudut sehadapan sama dengan 180°* *berlaku juga bahwa jika jumlah sudut sehadapan sama dengan 180° maka segiempat tersebut merupakan segiempat talibusur.*
Perlu dijelaskan bahwa segiempat talibusur adalah segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada satu lingkaran.

Karena titik-titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran maka ABCD adalah segiempat tali busur. Maka berlaku

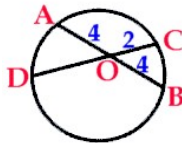
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^o$$
$$\angle BAD + \angle BCD = 180^o$$

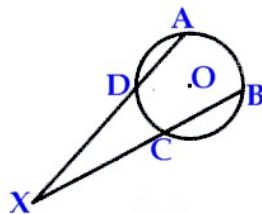
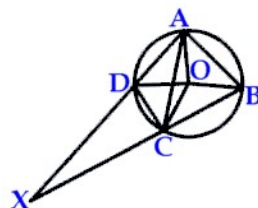
Contoh 43 :
ABC adalah sebuah segitiga dengan panjang AB = 6. Dibuat sebuah lingkaran dalam yang menyinggung sisi AB di K, sisi AC di L dan sisi BC di M (lihat gambar). Jika diketahui panjang LC = 5, tentukan keliling segitiga ABC.

Solusi :
Perhatikan bahwa CM = CL, BM = BK dan AL = AK
Keliling ΔABC = BK + KA + AL + LC + CM + MB
Keliling ΔABC = BK + KA + KA + LC + LC + BK
Keliling ΔABC = 2(BK + KA) + 2LC
Keliling ΔABC = 2AB + 2LC
Keliling ΔABC = $2 \cdot 6 + 2 \cdot 5$
Keliling ΔABC = 22

Contoh 44 :
Pada segiempat ABCD besar $\angle ABC = \angle ADC = 90^o$. Jika $\angle ADB = 35^o$ maka $\angle ACB$ sama dengan ·····

Solusi :
Karena $\angle ABC + \angle ADC = 180^o$ maka ABCD adalah segiempat talibusur sehingga titik-titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran.

$\angle$ADB dan $\angle$ACB menghadap talibusur yang sama yaitu sisi AB sehingga kedua sudut tersebut harus sama besar.
Jadi, $\angle ACB = 35^o$.

Contoh 45 :
(Alabama MC 2003) Talibusur AB dan CD berpotongan di O sehingga CO = 2, AB = 8 dan OA = OB. Panjang CD sama dengan .....

Solusi :

Karena AB = 8 dan OA = OB maka OA = OB = 4
Karena talibusur AB dan CD berpotongan di O maka berlaku
$AO \cdot OB = CO \cdot OD$
$4 \cdot 4 = 2 \cdot OD$
OD = 8
CD = CO + OD = 2 + 8 = 10
Jadi, panjang CD sama dengan 10.

Contoh 46 :
Titik A dan B terletak pada suatu lingkaran yang berpusat di O. Titik X terletak di luar lingkaran. Garis AX dan BX berturut-turut memotong lingkaran di titik D dan C. Diketahui besar $\angle AOB = 100^o$ dan $\angle COD = 60^o$. Besar $\angle AXB$ adalah .....

Solusi :

Karena sudut keliling sama dengan setengah sudut pusat maka
$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 50^o$
Karena sudut keliling sama dengan setengah sudut pusat maka
$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD = 30^o$
Karena $\angle ACX$ dan $\angle ACB$ saling berpelurus maka
$\angle ACX = 180^o - \angle ACB = 130^o$
Pada ΔAXC berlaku
$\angle AXC + \angle ACX + \angle CAX = 180^o$
$\angle AXB + 130^o + 30^o = 180^o$
$\angle AXB = 20^o$
Jadi, besar $\angle AXB$ adalah 20^o.

Contoh 47 :
(OSP 2002) Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas AB dari ΔABC. Titik sudut C bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada setengah lingkaran. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik C ?

Solusi :

AB adalah diameter dan D terletak pada lingkaran. Maka $\angle ADB = 90^o$
Karena AD = CD dan BD ⊥ AC maka ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC.
Karena BC = AB = diameter lingkaran yang berarti bernilai tetap dan B adalah titik yang tetap maka lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran dengan pusat titik B.
Jadi, lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran

LATIHAN 6 :

1. Tentukan sudut terkecil yang dibentuk oleh jarum panjang (menit) dan jarum pendek (jam) pada pukul 20 : 06.

2. (OSK 2002) Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut ?

3. (OSP 2004) Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari 1½ kali lebih cepat daripada Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah besar $\angle RPQ$?

4. (OSP 2006) Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar dengan DC. Sebuah lingkaran yang menyinggung keempat sisi trapesium dapat dibuat. Jika AB = 75 dan DC = 40, maka keliling trapesium ABCD = ·····

5. Garis AD adalah diameter setengah lingkaran dengan M adalah titik tengah diameter tersebut. Titik B dan titik C keduanya terletak pada setengah lingkaran sedemikian sehingga garis AC tegak lurus BM. Jika diketahui $\angle CAD = 50^o$, hitunglah sudut yang dibentuk antara garis AC dan BD.

6. (NHAC 1994-1995 Second Round) Sebuah lingkaran menyinggung bagian dalam suatu segienam ABCDEF. Jika diketahui panjang sisi-sisi AB = 1, BC = 2, CD = 3, DE = 4 dan EF = 5 maka panjang sisi FA adalah ········

7. (Canadian MO 1971) DEB adalah tali busur suatu lingkaran dengan DE = 3 dan EB = 5. Misalkan O adalah pusat lingkaran. Hubungkan OE dan perpanjangan OE memotong lingkaran di titik C. Diketahui EC = 1. Tentukan radius lingkaran tersebut.

8. (OSP 2010) Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1 merupakan garis singgung persekutuan kedua lingkaran tersebut. Jika PA = AB = 4, maka luas lingkaran kecil adalah ····

9. ABCD adalah persegi dengan panjang sisi 9. Titik P terletak pada sisi AB sehingga AP : PB = 7 : 2. Sebuah seperempat lingkaran dibuat dengan C sebagai titik pusat dan CB jejarinya. Dari titik P dibuat sebuah garis yang menyinggung seperempat lingkaran tersebut dan memotong sisi AD di titik Q. Panjang QD adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅

10. (OSP 2011) Misalkan ABC suatu segitiga dan P titik di dalam segitiga. Misalkan D, E, F berturut-turut titik di sisi-sisi BC, CA, AB sedemikian sehingga PD tegaklurus BC, PE tegaklurus CA dan PF tegaklurus AB. Jika segitiga DEF sama sisi dan $\angle APB = 70^{o}$, maka $\angle ACB$ = ⋅⋅⋅⋅⋅

11. (OSP 2011) Misalkan Γ lingkaran luar segitiga ABC. Talibusur AD adalah garis bagi $\angle BAC$ yang memotong BC di titik L. Talibusur DK tegaklurus pada AC dan memotongnya di titik M. Jika $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$, maka perbandingan $\frac{AM}{MC}$ = ⋅⋅⋅⋅⋅⋅

12. Jika $\angle ACB = \angle ADB$ maka buktikan bahwa dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, B, C dan D.

13. LM adalah tali busur suatu lingkaran dengan K adalah pertengahan LM. Dari titik K dibuat garis yang memotong lingkaran di titik D dan J. Dengan DJ sebagai diameter dibuat setengah lingkaran. Sebuah garis melalui titik K dan tegak lurus DJ memotong setengah lingkaran di titik S. Buktikan bahwa panjang KS = KL.

14. (Canadian MO 1975) Titik-titik A, B, C dan D berturut-turut terletak pada satu buah lingkaran pada arah putaran yang sama. Titik-titik P, Q, R dan S berturut-turut pertengahan busur-busur AB, BC, CD dan DA. Buktikan bahwa PR tegak lurus QS.

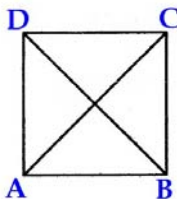
15. Titik P terletak di luar sebuah lingkaran. Dari titik P ditarik sebuah garis memotong lingkaran di titik A dan B dengan PA < PB. Dari titik P juga ditarik sebuah garis lain yang memotong lingkaran di titik C dan D dengan PC < PD. Satu buah garis lagi ditarik dari titik P menyinggung lingkaran di titik T. Buktikan bahwa

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2$$

7. GARIS (LANJUTAN)

Pembahasan pada bagian ini adalah melanjutkan apa yang telah dibahas pada bagian tentang garis, yaitu memanfaatkan semua yang telah dibahas pada bagian tentang garis termasuk juga sifat-sifat bangun datar pada bidang seperti segitiga, segiempat, segi n beraturan maupun lingkaran untuk menghitung maupun membuktikan persoalan.
Solusi yang akan dibahas pada bagian ini adalah dengan memanfaatkan koordinat-koordinat yang ada maupun yang ditentukan untuk mencapai tujuan yang akan dicapai. Penentuan koordinat yang diambil adalah yang paling mudah namun dengan tetap tidak mengurangi keumuman soal.
Mengingat penentuan koordinat menjadi suatu yang cukup penting maka perlunya banyak latihan.

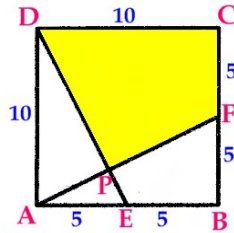
Contoh 48 :
Buktikan bahwa kedua diagonal persegi (bujur sangkar) saling tegak lurus.

Solusi :
Misalkan persegi tersebut adalah ABCD. Langkah awalnya adalah menentukan koordinat.

Hal yang paling mudah adalah dengan menganggap koordinat A(0, 0) serta B(a, 0). Hal ini tidak mengurangi keumuman soal sebab bagaimana pun posisi persegi kita selalu dapat membuat sumbu kartesian sedemikian hingga salah satu sisi akan berhimpit dengan sumbu X . Berdasarkan pemisalan tadi, kita sudah menganggap bahwa panjang sisi persegi tersebut adalah a. Akibat pemisalan tadi, maka dua buah sisi persegi akan sejajar dengan sumbu X dan dua sisi lagi tentu saja akan sejajar dengan sumbu Y.
Pemisalan koordinat A dan B tersebut akan menyebabkan koordinat C(a, a) dan D(0, a).
Persamaan garis yang melalui A(0, 0) dan C(a, a) adalah y = x dengan gradien, $m_1 = 1$.
Persamaan garis yang melalui B(a, 0) dan D(0, a) adalah y = −x dengan gradien, $m_2 = -1$.
Maka akan didapat $m_1m_2 = -1$.
Sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya, karena $m_1m_2 = -1$ maka hal tersebut memiliki arti garis AC dan BD saling tegak lurus.
Jadi, terbukti bahwa kedua diagonal persegi (bujur sangkar) saling tegak lurus.

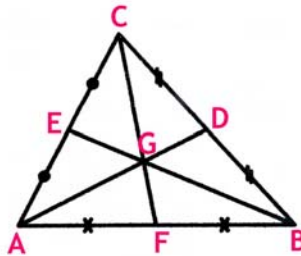
Contoh 49 :
Diketahui titik A(1, −1), B(3, 5) dan C(7, 17). Buktikan bahwa ketiga titik A, B dan C kolinier (terletak pada satu garis lurus).

Solusi :
Untuk membuktikan bahwa 3 titik terletak pada satu garis maka cukup dibuktikan bahwa dua di antara ruas garis – ruas garis tersebut memiliki kemiringan yang sama.
Kemiringan AB, $m_{AB} = \frac{5+1}{3-1} = 3$
Kemiringan AC, $m_{AC} = \frac{17+1}{7-1} = 3$
Jadi, terbukti bahwa ketiga titik A, B dan C kolinier (terletak pada satu garis lurus).

Contoh 50 :
(OSK 2009 yang disesuaikan) Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi 10. Misalkan E pada AB dan F pada BC dengan AE = FB = 5. Misalkan P adalah titik potong DE dan AF. Luas DCFP adalah ⋯⋯

Solusi :
Misalkan koordinat A(0,0), B(10,0) maka C(10,10) dan D(0,10). Maka koordinat E(5, 0) dan F(10, 5)

Persamaan garis AF adalah y = $\frac{1}{2}$x.
Persamaan garis ED adalah y = –2x + 10
Perpotongan garis ED dan AF adalah titik P maka
$\frac{1}{2}x_p = -2x_p + 10$ didapat $x_P = 4$ sehingga $y_P = 2$.
Misalkan [ABCD] menyatakan luas bangunan ABCD.
[AEP] = $\frac{1}{2} \cdot AE \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$
[ABF] = $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$
[AED] = $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25$
[DCFP] = 100 – [ABF] – [AED] + [AEP] = 100 – 25 – 25 + 5
Jadi, luas bangun DCFP adalah 55.

Contoh 51 :
Diketahui koordinat titik A(0, 0), titik B(a, 0) dan C(b, c).
a. Tentukan koordinat titik berat segitiga ABC.
b. Buktikan bahwa ketiga garis berat melalui satu titik.
c. Misalkan titik berat segitiga ABC tersebut adalah G, buktikan bahwa AG : GD = 2 : 1, BG : GE = 2 : 1 dan CG : GF = 2 : 1.

Solusi :

a. Misalkan AD, BE dan CF adalah garis berat segitiga ABC. Karena D, E dan F berturut-turut adalah pertengahan BC, AC dan AB maka
   Koordinat D($\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$), koordinat E($\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$) dan koordinat F($\frac{a}{2}$, 0).
   Persamaan garis AD adalah y = $\frac{c}{a+b}$x.
   Persamaan garis BE adalah $\frac{y-0}{x-a} = \frac{\frac{c}{2}-0}{\frac{b}{2}-a}$ yang setara dengan y = $\frac{c}{b-2a}(x - a)$.
   Misalkan garis AD dan BE berpotongan di titik G.
   $\frac{c}{a+b}x_G = \frac{c}{b-2a}(x_G - a)$
   $(b - 2a)x_G = (a + b)x_G - a(a + b)$
   $(a + b) = 3x_G$

$x_G = \frac{a+b}{3}$ sehingga $y_G = \frac{c}{3}$.

Maka koordinat titik berat segitiga adalah G($\frac{a+b}{3}$, $\frac{c}{3}$).

b. Untuk membuktikan apa yang ditanyakan dalam soal maka hanya perlu membuktikan bahwa titik G terletak pada garis CF.

Persamaan garis CF adalah $\frac{y-0}{x-\frac{a}{2}} = \frac{c-0}{b-\frac{a}{2}}$ yang setara dengan $y = \frac{c}{2b-a}(2x - a)$.

Uji titik ($\frac{a+b}{3}$, $\frac{c}{3}$) pada garis CF.

$y = \frac{c}{2b-a}\left(\frac{2a+2b}{3} - a\right) = \frac{c}{3}$

Jadi, terbukti bahwa ketiga garis berat melalui satu titik.

c. Karena A(0, 0) dan D($\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$) sedangkan G($\frac{a+b}{3}$, $\frac{c}{3}$) maka AG : GD = 2 : 1.

Karena B(a, 0) dan E($\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$) sedangkan G($\frac{a+b}{3}$, $\frac{c}{3}$) maka BG : GE = 2 : 1.

Karena C(b, c) dan F($\frac{a}{2}$,0) sedangkan G($\frac{a+b}{3}$, $\frac{c}{3}$) maka CG : GF = 2 : 1.

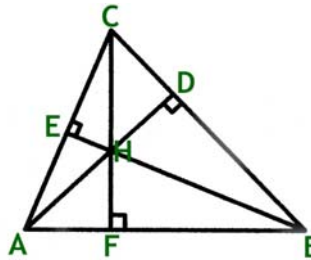
Jadi, terbukti bahwa AG : GD = 2 : 1, BG : GE = 2 : 1 dan CG : GF = 2 : 1.

Contoh 52 :

Pada segitiga ABC diketahui koordinat titik A(0, 0), titik B(a, 0) dan C(b, c).

a. Tentukan koordinat perpotongan garis tinggi segitiga ABC.

b. Buktikan bahwa ketiga garis tinggi melalui satu titik

Solusi :

a. Misalkan garis tinggi dari A memotong BC di D, garis tinggi dari B memotong AC di E dan garis tinggi dari C memotong AB di F.

Kemiringan garis BC adalah $m_{BC} = \frac{c}{b-a}$ sehingga kemiringan AD, $m_{AD} = \frac{a-b}{c}$

Karena A(0, 0) maka persamaan garis AD adalah $y = \frac{a-b}{c}x$

Karena garis AB sejajar sumbu X maka CF akan sejajar sumbu Y.

Jadi, persamaan garis CF adalah x = b.

Misalkan perpotongan garis CF dengan AD adalah di titik H.

Maka $x_H = b$ dan $y_H = \frac{a-b}{c}x_H = \frac{ab-b^2}{c}$.

Jadi, koordinat perpotongan garis tinggi segitiga, H(b, $\frac{ab-b^2}{c}$).

b. Kemiringan garis AC adalah $m_{AC} = \frac{c}{b}$

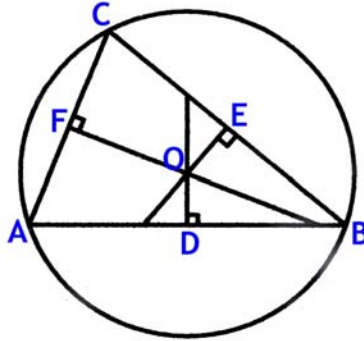
Maka kemiringan garis BE, $m_{BE} = -\frac{b}{c}$

Karena koordinat B(a, 0) maka persamaan garis BE adalah $y = -\frac{b}{c}(x - a)$

Uji titik H(b, $\frac{ab-b^2}{c}$) ke persamaan garis BE sehingga akan didapat bahwa titik H terletak pada garis BE.

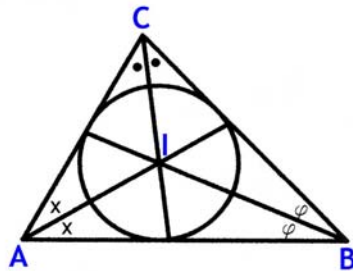
Jadi, terbukti bahwa ketiga garis tinggi melalui satu titik.

Contoh 53 :
Pada segitiga ABC diketahui koordinat titik A(0, 0), titik B(a, 0) dan C(b, c).
a. Tentukan pusat lingkaran luar segitiga ABC
b. Buktikan bahwa ketiga garis sumbu segitiga melalui satu titik.

Solusi :
Lingkaran luar suatu segitiga merupakan pertemuan garis sumbu.

a. Misalkan garis sumbu yang tegak lurus AB memotong AB di D, garis sumbu yang tegak lurus BC memotong BC di E dan garis sumbu yang tegak lurus AC memotong AC di F.
Jelas bahwa D, E dan F berturut-turut adalah pertengahan AB, BC dan AC.
Koordinat koordinat D($\frac{a}{2}$, 0), koordinat E($\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$) dan koordinat F($\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$).
Karena AB sejajar sumbu X maka persamaan garis sumbu melalui D adalah x = $\frac{a}{2}$.
Gradien AC, m_{AC} = $\frac{c}{b}$ sehingga gradien garis sumbu yang melalui F, $m_F = -\frac{b}{c}$.
Persamaan garis sumbu yang melalui F adalah $y - \frac{c}{2} = -\frac{b}{c}(x - \frac{b}{2})$.
Misalkan perpotongan garis sumbu melalui F dan garis sumbu melalui D adalah titik O yang juga merupakan pusat lingkaran luar segitiga ABC.
$y_O - \frac{c}{2} = -\frac{b}{c}(\frac{a}{2} - \frac{b}{2})$
$y_O = \frac{b^2-ab+c^2}{2c}$
Maka pusat lingkaran luar segitiga ABC adalah O($\frac{a}{2}$, $\frac{b^2-ab+c^2}{2c}$)

b. Kemiringan garis BC, $m_{BC} = \frac{c}{b-a}$
Maka gradien garis sumbu yang melalui titik E, $m_E = \frac{a-b}{c}$.
Persamaan garis sumbu yang melalui titik E adalah $y - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{c}(x - \frac{a+b}{2})$.
Uji titik O($\frac{a}{2}$, $\frac{b^2-ab+c^2}{2c}$) terhadap garis sumbu yang melalui E sehingga akan didapat bahwa titik O terletak pada garis sumbu tersebut.
Jadi, terbukti bahwa ketiga garis sumbu segitiga melalui satu titik.

Contoh 54 :
Pada segitiga ABC diketahui koordinat titik A(0, 0), titik B(a, 0) dan C(b, c). Tentukan pusat lingkaran dalam segitiga ABC.

Solusi :
Misalkan pusat lingkaran dalam segitiga tersebut adalah titik I.
Perhatikan gambar.

Jelas bahwa pusat lingkaran dalam segitiga ABC adalah $I(x_I, r)$ dengan r adalah jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC.

Luas segitiga ABC = $\frac{ac}{2}$

Keliling segitiga ABC = $a + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{(a-b)^2+c^2}$

Maka $\frac{1}{2}r\left(a + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{(a-b)^2+c^2}\right) = \frac{ac}{2}$

$r = \frac{ac}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}$

Persamaan garis AC adalah by − cx = 0.

Jarak titik I ke garis AC sama dengan r maka

$$\frac{ac}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}} = \left|\frac{b\left(\frac{ac}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}\right)-c(x_I)}{\sqrt{b^2+c^2}}\right|$$

Karena $\sqrt{b^2+c^2}$ > b dan dengan menganggap bahwa $x_I > 0$ maka

$$\frac{ac}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}} = \frac{c(x_I)-\frac{abc}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$a\left(\sqrt{b^2+c^2} + b\right) = x_I\left(a + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{(a-b)^2+c^2}\right)$

$x_I = \frac{a\left(\sqrt{b^2+c^2}+b\right)}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}$

Jadi, pusat lingkaran dalam segitiga ABC adalah $I\left(\frac{a\left(\sqrt{b^2+c^2}+b\right)}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}, \frac{ac}{a+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{(a-b)^2+c^2}}\right)$

Alternatif lain adalah dengan memotongkan garis bagi AI dengan BI.

Untuk menentukan persamaan garis AI adalah dengan mencari kemiringan garis AI yang didapat dari kemiringan garis AC. Kemiringan garis AC, $m_{AC} = \frac{c}{b}$.

Misalkan $\angle CAB = 2\alpha$ maka $\angle IAB = \alpha$.

$\tan 2\alpha = m_{AC} = \frac{c}{b} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ yang setara dengan persamaan

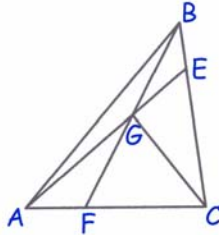
$c\tan^2\alpha + 2b\tan\alpha - c = 0$

Dengan mengambil $\tan\alpha > 0$ maka

$\tan\alpha = m_{AI} = \frac{-2b+\sqrt{4b^2+4c^2}}{2c} = \frac{-b+\sqrt{b^2+c^2}}{c} = \frac{c}{b+\sqrt{b^2+c^2}}$.

Karena kemiringan garis AI diketahui dan garis AI melalui A(0, 0) maka persamaan garis AI dapat ditentukan. Dengan cara yang sama dapat ditentukan persamaan garis BI. Perpotongan kedua garis AI dan Bi adalah titik I yang merupakan pusat lingkaran dalam segitiga. Penulis menyerahkan kepada Pembaca untuk menyelesaikan alternatif penyelesaian ini. Hal yang perlu diperhatikan adalah bahwa sudut kemiringan diukur terhadap sumbu X positif.

Contoh 55 :
(OSK 2006/Latihan 3D Nomor 10) Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan

Solusi :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), C(a, 0) dan B(b, c).

Karena AF : FC = 1 : 2 maka koordinat F($\frac{1}{3}$a, 0).

Karena G adalah pertengahan BF sedangkan koordinat B(b, c) maka koordinat G($\frac{a+3b}{6}$, $\frac{c}{2}$).

Kemiringan garis AG adalah $\frac{3c}{a+3b}$ sehingga persamaan garis AG adalah $y = \frac{3c}{a+3b}x$.

Kemiringan garis BC adalah $\frac{c}{b-a}$ dan melalui C(a, 0) sehingga persamaan garis BC adalah $y = \frac{c}{b-a}(x - a)$.

Garis AG berpotongan dengan BC di E sehingga

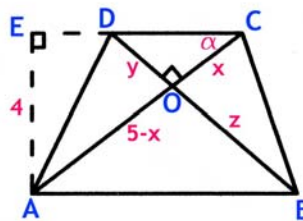
$\frac{3c}{a+3b}x_E = \frac{c}{b-a}(x_E - a)$

$x_E = \frac{a+3b}{4}$ sehingga $y_E = \frac{3c}{a+3b}\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \frac{3c}{4}$

Karena E($\frac{a+3b}{4}$, $\frac{3c}{4}$) sedangkan C(a, 0) dan B(b, c) maka BE : EC = 1 : 3.

Jadi, titik membagi sisi BC dalam perbandingan 1 : 3.

Contoh 56 :
(OSP 2004/Hongkong PSC 1988/Latihan 4 Nomor 3) Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut ?

Solusi :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0) dan B(a, 0). Karena tinggi trapesium sama dengan 4 maka ordinat C dan D sama dengan 4. Misalkan koordinat C(b, 4) dan D(c, 4).

$m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$

$\frac{4}{b} \cdot \frac{4}{c-a} = -1$

b(a – c) = 16

- Jika panjang AC = 5

  $b^2 + 4^2 = 5^2$ sehingga b = 3

  Maka $a - c = \frac{16}{3}$

  Luas trapesium = $\frac{AB+CD}{2} \cdot t = \frac{(a)+(b-c)}{2} \cdot 4 = (\frac{16}{3} + 3) \cdot 2 = \frac{50}{3}$

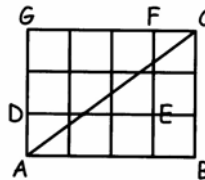
Jadi, luas trapesium ABCD = $\frac{50}{3}$

- Jika panjang BD = 5
  $(a - c)^2 + 4^2 = 5^2$ sehingga a – c = 3
  Maka b = $\frac{16}{3}$
  Luas trapesium = $\frac{AB+CD}{2} \cdot$ t = $\frac{(a)+(b-c)}{2}$ · 4 = ($\frac{16}{3}$ + 3) · 2 = $\frac{50}{3}$
  Jadi, luas trapesium ABCD = $\frac{50}{3}$

Jadi, luas trapesium ABCD = $\frac{50}{3}$.

LATIHAN 7

1. Persegi panjang ABCD memiliki ukuran AB = 10 dan BC = 5. Titik E terletak pada sisi DC sehingga DE : EC = 9 : 1. Titik F pada sisi BC sehingga BF : FC = 2 : 3. Buktikan bahwa garis AF tegak lurus BE.

2. Segiempat ABCG dibagi menjadi 12 buah persegi yang sama. Panjang AB = 4 dan panjang BC = 3. Berapakah luas irisan antara segiempat DEFG dengan segitiga ABC ?

3. Pada persegi ABCD dengan panjang sisi k terdapat titik P dan Q yang masing-masing pada sisi AB dan BC sedemikian sehingga AP : PB = 2 : 1 dan BQ : QC = 3 : 1. Garis DP dan garis AQ berpotongan di titik R. Hitunglah luas segitiga ARP dinyatakan dalam k.

4. (OSP 2003) Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,1) dan (9,1) menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut ?

5. Diberikan persegi panjang (siku empat) ABCD dengan AB = a dan BC = b. Titik O adalah perpotongan antara kedua diagonalnya. Perpanjang sisi BA sehingga sehingga AE = AO, juga perpanjang diagonal DB sehingga BZ = BO. Asumsikan segitiga EZC samasisi. Buktikan bahwa
   i. $b = a\sqrt{3}$
   ii. EO tegak lurus ZD

6. (OSP 2006/Latihan 3B Nomor 5) Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa AE $\perp$ BF.

7. (OSP 2010) Diberikan segitiga ABC. Andaikan P dan P_1 titik-titik pada BC, Q pada CA, dan R pada AB, sedemikian rupa sehingga
$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$
   Misalkan G titik berat segitiga ABC dan K = $AP_1 \cap RQ$. Buktikan, bahwa titik-titik P, G, dan K kolinier (terletak pada satu garis)

8. (Bulgarian MO 1995 : Spring MC Grade 8/Latihan 4 No 9) Misalkan M adalah titik tengah sisi BC pada jajaran genjang ABCD sedangkan N adalah perpotongan AM dan diagonal BD. Perpanjangan DA dan CN berpotongan di titik P.

a. Buktikan bahwa AP = AD
b. Jika AB = AC maka buktikan CP = BD

9. Lingkaran L memiliki pusat di M. Titik A terletak di luar lingkaran. Dari titik A dibuat garis yang memotong lingkaran di titik B dan C dengan B terletak di antara A dan C. Lalu dibuat garis CM yang pepanjangannya memotong lingkaran di titik D. Ternyata AD menyinggung lingkaran. Titik E terletak pada ruas AD sehingga AE = 1. Jika panjang AB = 2 dan BC = 6, maka buktikan bahwa garis AM, BD dan CE berpotongan di satu titik.

10. (AIME 1983/Hongkong PSC 1988) Dua lingkaran yang masing-masing berjari-jari 8 dan 6 mempunyai jarak antar pusat 12. Melalui titik P yang merupakan salah satu titik perpotongan kedua lingkaran dibuat tali busur PQ dan PR dengan Q, P, R segaris. Jika PQ = PR, tentukan PQ^2.

11. Titik D dan E berturut-turut terletak pada sisi BC dan AC sehingga AD dan BE adalah garis tinggi. Buktikan bahwa garis yang menyinggung lingkaran luar ΔABC di titik C akan sejajar dengan garis yang melalui DE.

BAB IV
KOMBINATORIK

1. KAIDAH PENCACAHAN DAN PENJABARAN BINOM NEWTON

Ada beberapa ilustrasi persoalan yang berhubungan dengan cara yang mungkin terjadi seperti sebagai berikut :

Contoh 1 :
Misalkan terdapat 3 buah celana dan 4 buah baju. Permasalahannya adalah ada berapa banyak cara seseorang memilih celana dan baju yang akan dipakai ?

Contoh 2 :
Misalkan ada 3 buku : Matematika, Fisika dan Biologi. Jika seseorang ingin menumpuk dua buku secara vertikal, ada berapa cara ia melakukan penumpukan ?

Masalah-masalah tersebut dapat diselesaikan dengan Kaidah Pencacahan yang dapat ditempuh dengan menggunakan satu atau beberapa cara berikut :

- aturan pengisian tempat (*filling slot*)
- permutasi
- kombinasi

A. Aturan pengisian tempat (*filling slots*)

Misalkan ada n tempat tersedia dengan k_1 adalah banyaknya cara mengisi tempat pertama, k_2 adalah banyaknya cara mengisi tempat kedua, dan seterusnya hingga k_n adalah banyaknya cara mengisi tempat ke-n. Maka banyaknya cara mengisi tempat adalah $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$.
Cara ini disebut sebagai *aturan pengisian tempat* dan sering disebut dengan *kaidah perkalian.*

Sebagai ilustrasi penyelesaian soal contoh 1 adalah sebagai berikut :
Tempat pertama adalah memilih celana. Karena banyaknya celana ada 3, maka banyaknya cara memilih celana ada 3 sedangkan banyaknya cara memilih baju ada 4. Maka banyaknya cara memilih pasangan celana dan baju ada $4 \cdot 3 = 12$ cara.

Untuk soal pada contoh 2, banyaknya cara memilih tempat pertama ada 3 cara karena bukunya ada 3. Untuk memilih buku yang kedua hanya tinggal 2 cara karena satu buku sudah dipilih pada tempat pertama. Banyaknya cara memilih dua buku adalah $3 \cdot 2 = 6$ cara.

Contoh 3 :
Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf R, A, J, I, N jika
a) huruf pertama dimulai dari huruf hidup (vokal)
b) huruf pertama dimulai dari huruf mati (konsonan)

Solusi :
a) Banyaknya cara memilih huruf pertama ada 2 yaitu A atau I. Karena huruf A atau I sudah dipakai sebagai huruf pertama maka banyaknya cara memilih huruf kedua tinggal 4 cara. (Misalkan huruf pertama adalah A maka kemungkinan huruf kedua ada 4 yaitu R, J, I atau N.) Banyaknya cara memilih huruf ketiga ada 3 cara, huruf keempat ada 2 cara dan huruf kelima tinggal 1 cara.
Banyaknya cara menyusun huruf tersebut ada $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ cara.
b) Banyaknya cara memilih huruf pertama ada 3 yaitu R, J atau N. Banyaknya cara memilih huruf kedua, ketiga, keempat dan kelima berturut-turut ada 4, 3, 2, dan 1 cara.
Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ cara.

Contoh 4 :
Sembilan orang siswa akan duduk pada 5 kursi sejajar. Ada berapa cara susunan mereka ?

Solusi :
Kursi pertama ada 9 kemungkinan. Karena seorang siswa tidak akan mungkin duduk pada 2 kursi dalam waktu yang bersamaan maka banyaknya kemungkinan yang duduk pada kursi kedua tinggal 8. Dan seterusnya.
Banyaknya cara susunan mereka adalah 9 x 8 x 7 x 6 x 5 = 15120.

Contoh 5 :
Dari lima angka 0, 3, 4, 5, 7 akan dibentuk sebuah bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
a) angka-angkanya boleh berulang
b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Solusi :
a) Angka pertama sebagai ribuan dapat dipilih 4 kemungkinan yaitu 3, 4, 5 atau 7. Angka 0 tidak mungkin menjadi angka pertama sebab akan menyebabkan bilangan yang dibentuk hanya terdiri dari 3 angka. Karena boleh berulang maka angka ratusan, puluhan dan satuan masing-masing dapat dipilih 5 kemungkinan.
Banyaknya bilangan yang terbentuk ada 4 x 5 x 5 x 5 = 500 bilangan.
b) Angka pertama sebagai ribuan dapat dipilih 4 cara. Karena tidak boleh berulang sedangkan satu angka sudah dipakai pada angka pertama maka banyaknya cara memilih angka kedua hanya tinggal 4 cara. (Misalkan angka pertama dipilih 3 maka pilihan pada angka kedua adalah 0, 4, 5 atau 7.) Banyaknya pilihan pada angka ketiga ada 3 cara dan banyaknya pilihan pada angka keempat ada 2 cara.
Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 4 x 4 x 3 x 2 = 96 bilangan.

Contoh 6 :
Denny akan membentuk bilangan genap 3 angka yang angka-angkanya diambil dari 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
a) angka-angkanya boleh berulang
b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Solusi :
a) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 7 kemungkinan. Angka kedua dapat dipilih juga dari 7 kemungkinan. Karena bilangan tersebut genap maka angka satuan hanya dapat dipilih dari 4 kemungkinan yaitu 2, 4, 6 atau 8.
Banyaknya bilangan yang terbentuk ada 7 x 7 x 4 = 196 bilangan.
b) Sebuah bilangan dikatakan genap atau ganjil cukup dengan melihat angka satuannya. Karena bilangan tersebut genap maka pemilihan pertama dilakukan pada angka satuan. Angka satuan dapat dipilih dari 4 kemungkinan, yaitu 2, 4, 6 atau 8. Angka puluhan dapat dipilih dari 6 cara sedangkan angka ratusan dapat dipilih dari 5 kemungkinan.
Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 5 x 6 x 4 = 120 bilangan.

Contoh 7 :
Dari tujuh angka 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, Furkan akan membentuk sebuah bilangan 3 angka dan lebih dari 600. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
a) angka-angkanya boleh berulang
b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Solusi :
Sebuah bilangan 3 angka dikatakan lebih dari 600 jika digit ratusan sekurang-kurangnya 6.
a) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 4 kemungkinan, yaitu 6, 7, 8 atau 9. Angka kedua dapat dipilih juga dari 7 kemungkinan. Angka satuan juga dapat dipilih dari 7 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang terbentuk ada 4 x 7 x 7 = 196 bilangan.
b) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 4 kemungkinan, yaitu 6, 7, 8 atau 9. Angka puluhan dapat dipilih dari 6 cara sedangkan angka satuan dapat dipilih dari 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 4 x 6 x 5 = 120 bilangan.

Contoh 8 :
Hansen mendapatkan tugas membentuk sebuah bilangan tiga angka kurang dari 500 yang angka-angka adalah 2, 3, 4, 5, 6, 7 atau 9. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
a) angka-angkanya boleh berulang
b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Solusi :
Sebuah bilangan 3 angka dikatakan kurang dari 500 jika digit ratusan kurang dari 5.
a) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 3 kemungkinan, yaitu 2, 3 atau 4. Angka kedua dapat dipilih dari 7 kemungkinan. Angka satuan juga dapat dipilih dari 7 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang terbentuk ada 3 x 7 x 7 = 147 bilangan.
b) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 3 kemungkinan, yaitu 2, 3 atau 4. Angka puluhan dapat dipilih dari 6 cara sedangkan angka satuan dapat dipilih dari 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 3 x 6 x 5 = 90 bilangan.

Contoh 9 :
Dari tujuh angka 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 akan dibentuk sebuah bilangan 3 angka dan lebih dari 500. Berapa banyak bilangan genap yang dapat dibentuk jika :
a) angka-angkanya boleh berulang
b) angka-angkanya tidak boleh berulang

Solusi :
a) Angka pertama sebagai ratusan dapat dipilih 4 kemungkinan, yaitu 5, 6, 8 atau 9. Angka kedua dapat dipilih dari 7 kemungkinan. Angka satuan dapat dipilih dari 3 kemungkinan. Banyaknya bilangan yang terbentuk ada 4 x 7 x 3 = 84 bilangan.
b) Pada bagian inilah timbul sebuah permasalahan. Jika kita menjawab banyaknya bilangan adalah 4 x 5 x 3 dengan alasan bahwa banyaknya bilangan yang mungkin untuk angka ratusan ada 4 dan angka satuan ada 3 sedangkan sisa bilangan tinggal 5 maka jawaban tersebut adalah keliru. Jika angka ratusan yang dipilih adalah 5 atau 9 maka banyaknya kemungkinan angka satuan memang benar ada 3 yaitu 4, 6 atau 8. Tetapi bila angka ratusan yang dipilih adalah 6 atau 8 maka angka satuan yang mungkin dipilih hanya tinggal 2. Sedangkan jika kita menjawab banyaknya bilangan adalah 4 x 5 x 2 juga mengandung kesalahan dengan alasan bahwa jika angka ratusan yang kita pilih adalah 5 atau 9 maka kemungkin angka satuan yang dipilih adalah tetap 3. Lalu bagaimana cara kita menjawab soal ini ? Ada dua alternatif yang akan dibahas.

Alternatif 1 :
Sudah dijelaskan bahwa banyaknya kemungkinan untuk angka ratusan ada 4 namun pemilihan angka ratusan ternyata menimbulkan dampak yang berbeda untuk angka satuan. Maka penyelesaian soal ini adalah dengan membagi kasus terhadap pemilihan angka ratusan.
Kasus pertama adalah jika angka ratusannya adalah 5 atau 9. Banyaknya cara memilih angka ratusan ada 2. Banyaknya kemungkinan angka satuan tetap ada 3 sedangkan angka puluhan tinggal 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan untuk kasus pertama ini adalah 2 x 5 x 3 = 30 bilangan.

Kasus kedua adalah jika angka ratusannya adalah 6 atau 8. Banyaknya cara memilih angka ratusan ada 2, yaitu 6 atau 8 tersebut. Banyaknya kemungkinan angka satuan tinggal 2. Penjelasannya adalah jika angka ratusan yang dipilih adalah 6 maka kemungkinan angka satuannya adalah 4 atau 8 sedangkan jika angka ratusan yang dipilih adalah 8 maka kemungkinan angka satuannya adalah 4 atau 6. Sedangkan angka puluhan tinggal 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan untuk kasus kedua ini adalah 2 x 5 x 2 = 20 bilangan.
Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 30 + 20 = 50 bilangan.

Alternatif 2 :
Caranya sebenarnya sama dengan alternatif 1, tetapi kita memulainya dari angka satuan.
Kita bagi kasus pemilihan angka satuan menjadi 2 kasus.
Kasus pertama adalah jika angka satuan yang dipilih adalah 4. Banyaknya cara memilih hanya ada 1. Angka ratusan yang dipilih tetap ada 4 kemungkinan yaitu 5, 6, 8 atau 9. Sedangkan angka puluhan tinggal 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan untuk kasus pertama ini adalah 1 x 5 x 4 = 20 bilangan.
Kasus kedua adalah jika angka satuan yang dipilih adalah 6 atau 8. Banyaknya cara memilih ada 2. Angka ratusan yang dipilih tinggal 3 kemungkinan. Sedangkan angka puluhan tinggal 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan untuk kasus kedua ini adalah 2 x 5 x 3 = 30 bilangan.
Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada 20 + 30 = 50 bilangan.

LATIHAN 1.A

1. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf K, A, N, T, O, R jika
   a. huruf pertama dimulai dari huruf hidup (vokal)
   b. huruf pertama dimulai dari huruf mati (konsonan)

2. Tujuh orang siswa akan duduk pada 7 kursi sejajar. Ada berapa cara susunan mereka ?

3. Suatu keluarga terdiri dari 2 orang putera dan 3 orang puteri. Apabila kelima orang tersebut berdiri sejajar dengan posisi yang putra selalu mengapit yang putri, maka ada berapa formasi yang mungkin ?

4. Sebagai panitia perlombaan sepakbola, Furkan mencoba menyusun tujuh buah bendera A, B, C, D, E, F dan G pada posisi sejajar. Ada berapa banyak cara penyusunan jika diinginkan bendera A dan B berada di ujung ?

5. Weki mencoba membentuk sebuah bilangan 3 angka dengan angka-angkanya tidak boleh ada yang sama dan angka-angka tersebut diambil dari 3, 5, 6, 7, 8 dan 9. Ada berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk ?

6. Ada berapa banyak bilangan positif genap terdiri dari 5 angka berbeda dapat dibuat jika tidak ada satu pun angka 5 serta angka ribuan harus angka 0 ?

7. Pada sebuah klub dansa, terdapat 6 laki-laki dan 6 perempuan yang akan melakukan latihan. Dalam latihan ini, laki-laki harus dipasangkan dengan perempuan. Ada berapa banyak carakah membentuk 6 pasangan ini ?

8. Edwin sedang menyusun suatu bilangan tiga angka dengan angka-angka : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8. Jika bilangan itu tidak memuat angka yang sama, maka ada berapa banyaknya bilangan yang dapat dibentuk dengan syarat bilangan tersebut genap ?

9. Dari angka 3, 5, 6, 7 dan 8 dibuat bilangan yang terdiri dari tiga angka berbeda. Di antara bilangan-bilangan tersebut yang terletak antara 300 dan 800 ada sebanyak ⋯⋯⋯

10. Dari angka-angka : 1, 2, 4, 5, 7, 8 akan disusun suatu bilangan yang terdiri atas 3 angka. Jika bilangan itu tidak memuat angka yang sama, maka ada berapa banyaknya bilangan yang dapat dibentuk dengan syarat bilangan tersebut lebih dari 245 ?

11. (OSK 2003) Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?

12. Sebuah bilangan 4 angka dibentuk dengan 3 angka di antaranya adalah 3, 4 dan 6. Jika keempat angkanya berbeda serta bilangan tersebut habis dibagi 3, maka ada berapa bilangan yang dapat dibentuk ?

13. Hansen sedang membentuk sebuah bilangan 3 angka kurang dari 600 yang angka-angkanya diambil dari 0, 3, 4, 6, 7, 8 dan 9. Ada berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk jika :
    a. angka-angkanya boleh berulang
    b. angka-angkanya tidak boleh berulang

14. Ada berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk oleh Furkan dengan syarat : bilangan tersebut 4 angka, lebih dari 4000 dan angka-angkanya diambil dari 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, dan 9 ?
    a. angka-angkanya boleh berulang
    b. angka-angkanya tidak boleh berulang

15. Putu Wira sedang merancang sebuah bendera 6 strip vertikal. Warna masing-masing strip vertikal harus menggunakan sebagian atau keseluruhan warna kuning, hijau, biru atau merah. Dalam berapa banyak rancangan ini dapat dibuat bila dua strip berdekatan tidak boleh berwarna sama ?

16. Semua susunan huruf-huruf yang terdiri dari 3 angka disusun. Jika AAA berada pada urutan pertama sedangkan AAB pada urutan kedua maka berada pada urutan berapakah susunan huruf OSN ?

17. Dari angka-angka : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 akan disusun suatu bilangan ganjil yang tediri atas 3 angka. Jika bilangan itu tidak memuat angka yang sama dan kurang dari 500, maka ada berapa banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ?

18. Ada berapa banyak bilangan genap 3 angka, angka-angkanya tidak berulang dan kurang dari 600 dapat dibentuk jika angka-angkanya diambil dari 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ?

19. (OSK 2004) Nomor polisi mobil-mobil di suatu daerah selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap serta angka 0 tidak boleh menjadi angka pertama, maka ada berapa banyak sistem penomoran mobil yang dapat dibentuk ?

20. Buah benteng pada permainan catur mempunyai kemampuan untuk bergerak atau ”memakan” buah lawan pada petak-petak yang berada pada satu garis horizontal atau satu garis vertikal dengan dirinya. Hansen mencoba menyusun 3 buah benteng yang ketiganya dianggap berbeda warna pada papan catur 8 x 8 sehingga ketiga benteng tersebut tidak saling ”makan”. Ada berapa cara penyusunan yang dapat dilakukannya ?

21. Pada suatu turnamen diikuti oleh 6 tim dengan sistem pertandingan sebagai berikut : Tim F melawan Tim E dan tim yang kalah sebagai juara 6 sedangkan yang menang menghadapi tim D. Yang kalah sebagai juara 5 sedangkan pemenangnya menghadapi tim C. Yang kalah sebagai juara 4 sedangkan pemenangnya menghadapi tim B. Yang kalah sebagai juara 3 sedangkan pemenangnya menghadapi tim A. Yang kalah sebagai juara 2 sedangkan pemenangnya juara 1. Ada berapa banyak susunan juara yang dapat dibuat ?

B. Permutasi

Sebelum dibahas lebih jauh mengenai permutasi, akan diperkenalkan terlebih dahulu definisi dan notasi faktorial.
Untuk setiap n bilangan asli, didefinisikan :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

Notasi n! dibaca n faktorial
Dedefinisikan juga 1! = 1 dan 0! = 1.
Sebagai ilustrasi 2! = 1 x 2 = 2, 3! = 1 x 2 x 3 = 6, 4! = 1 x 2 x 3 x 4 = 24, 5! = 120.
n! = n x (n – 1)! = n x (n – 1) x (n – 2)! = n x (n – 1) x (n – 2) x (n – 3)! dan seterusnya.

1) Permutasi dari Unsur-unsur Yang Berbeda

Permutasi r obyek yang diambil dari n obyek berbeda, dengan r ≤ n adalah ${}_nP_r$ yang didefinisikan dengan :

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{..............................} \qquad (1.B.1.1)$$

Perhatikan bahwa dalam permutasi urutan sangat diperhatikan. Ini berbeda dengan kombinasi yang tidak memperhatikan urutan yang nantinya akan dibahas pada bagian lain.

Contoh 10 :
Misalkan dari huruf-huruf P, Q dan R akan dibuat susunan yang terdiri dari 3 huruf maka ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat ?

Solusi :
Dengan aturan pengisian tempat yang telah dipelajari sebelumnya dapat diketahui bahwa banyaknya susunan adalah 3 x 2 x 1 = 6 susunan.
Jika kita daftarkan satu-satu maka susunan tersebut adalah PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ, RQP yang semuanya ada 6 susunan.
Perhatikan bahwa PQR dan PRQ hanya menggunakan huruf P, Q dan R. Tetapi kedua susunan tersebut dianggap berbeda karena urutannya diperhatikan. Maka kita dapat menggunakan permutasi 3 unsur yang diambil dari 3 unsur.
Banyaknya susunan ${}_3P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!}$ = 6 susunan sebab 3! = 6 dan 0! = 1.

Contoh 11 :
Misalkan dari huruf-huruf A, B, C dan D akan dibuat susunan yang terdiri dari 2 huruf maka ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat ?

Solusi :
Dengan aturan pengisian tempat, banyaknya susunan adalah 4 x 3 = 12 susunan.
Jika kita daftarkan satu-satu maka susunan tersebut adalah AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB dan DC yang semuanya ada 12 susunan.
Perhatikan bahwa AB dan BA hanya menggunakan huruf A dan B. Tetapi kedua susunan tersebut dianggap berbeda karena urutannya diperhatikan. Maka kita dapat menggunakan permutasi 2 unsur yang diambil dari 4 unsur.
Banyaknya susunan ${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!}$ = 12 susunan sebab 4! = 24 dan 2! = 2.

Contoh 12 :
Ada berapa banyak bilangan terdiri dari 3 angka berbeda yang disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 4 dan 5 ?

Solusi :
Dari bahasa soal, kita dapat menarik kesimpulan bahwa jika menggunakan aturan pengisian tempat maka bilangan tersebut masuk dalam kategori tidak berulang (lihat penjelasan sebelumnya).
Karena 123 dianggap berbeda dengan 231 maka berarti urutan diperhatikan.
Kita dapat menghitung banyaknya susunan dengan permutasi 3 unsur yang diambil dari 5 unsur berbeda.
Banyaknya bilangan adalah ${}_5P_3$ = 60 bilangan.

Contoh 13 :
Berapa banyak bilangan dapat dibentuk dari sebagian atau semua angka 2, 3, 4, 5 jika tidak boleh ada angka yang diulang ?

Solusi :
Bilangan yang digunakan dapat hanya terdiri dari 1, 2, 3 atau 4 angka.
Jika bilangan tersebut terdiri dari 1 angka saja maka banyaknya bilangan = ${}_4P_1$.
Jika bilangan tersebut terdiri dari 2 angka saja maka banyaknya bilangan = ${}_4P_2$.
Jika bilangan tersebut terdiri dari 3 angka saja maka banyaknya bilangan = ${}_4P_3$.
Jika bilangan tersebut terdiri dari 4 angka maka banyaknya bilangan = ${}_4P_4$.
Banyaknya bilangan dapat dibentuk adalah ${}_4P_1 + {}_4P_2 + {}_4P_3 + {}_4P_4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$

Contoh 14 :
Ada berapa banyak cara memilih 3 orang siswa dari 8 orang siswa yang akan ditunjuk sebagai Ketua, Wakil Ketua dan Sekretaris ?

Solusi :
Perhatikan bahwa pada soal ini urutan diperhatikan. Misalkan 3 siswa yang terpilih adalah A, B dan C. Dengan intuisi, jelas bahwa jika A sebagai Ketua, B sebagai Wakil Ketua dan C sebagai Sekretaris berbeda susunannya jika A sebagai Ketua, C sebagai Wakil Ketua dan B sebagai Sekretaris.
Maka penyelesaian soal ini dapat dilakukan dengan permutasi 3 obyek yang dipilih dari 8 obyek.
Banyaknya cara adalah ${}_8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 = 336$ cara.

Contoh 15 :
Sembilan orang siswa akan duduk pada lima kursi sejajar. Ada berapa cara susunan yang dapat mereka buat ?

Solusi :
Banyaknya susunan adalah ${}_9P_5$ = 15120.

2) Permutasi Yang Memuat Beberapa Unsur Yang Sama
Pada contoh 10, huruf-huruf yang disediakan semuanya berbeda yaitu P, Q dan R. Bagaimana jika huruf-huruf yang disediakan ada yang sama. Misalkan pada contoh berikut :

Contoh 16 :
Misalkan dari huruf-huruf P, P dan Q akan dibuat susunan yang terdiri dari 3 huruf maka ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat ?

Solusi :
Kita tidak bisa langsung menjawab bahwa banyaknya susunan adalah ${}_3P_3$ = 6 karena dalam kenyataannya banyaknya susunan hanya ada 3, yaitu PPQ, PQP dan QPP.

Banyaknya permutasi n unsur yang memuat k unsur yang sama, m unsur yang sama dan p unsur yang sama dengan k + m + p ≤ n ditentukan dengan rumus

$$P = \frac{n!}{k! \cdot m! \cdot p!} \qquad \text{..............................} \qquad (1.B.2.1)$$

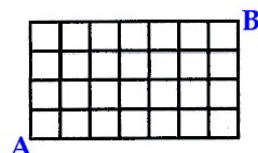
Pada contoh 16, ada 3 unsur yaitu P, P dan Q dengan terdapat 2 unsur P yang sama maka banyaknya susunan adalah $\frac{3!}{2!}$ = 3.

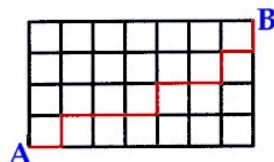
Contoh 17 :
Ada berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari huruf-huruf T, E, R, C, E, C, E, R?

Solusi :
Banyaknya unsur ada 8 dengan terdapat 3 huruf E yang sama, 2 huruf R yang sama dan 2 huruf C yang sama, maka banyaknya susunan = $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ = $\frac{8x7x6x5x4x3x2x1}{(3x2x1)(2x1)(2x1)}$ = 1680 susunan.

Contoh 18 :
Ada berapa banyak bilangan 7 angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka dari 3464383 (termasuk bilangan 3464383 itu sendiri) ?

Solusi :
Banyaknya angka ada 7 dengan terdapat angka 3 muncul 3 kali dan angka 4 muncul 2 kali.
Maka banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah = $\frac{7!}{3! \cdot 2!}$ = 420.

Contoh 19 :
Perhatikan gambar.

Jika seseorang akan berjalan dari titik A ke titik B. Ada berapa banyak cara jalan terpendek yang dapat dipilihnya ?

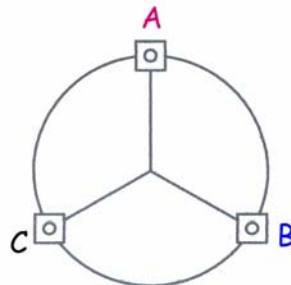
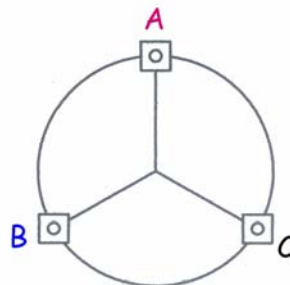
Solusi :
Jalan terpendek yang bisa dipilih orang tersebut adalah jika ia memilih jalan ke kanan atau ke atas tanpa berjalan ke kiri atau ke bawah.
Misalkan jika berjalan ke kanan diberi tanda 1 dan jika ke atas diberi tanda 2.
Jadi jika 12111211212 maka orang tersebut berjalan ke kanan lalu ke atas lalu ke kanan tiga kali lalu ke atas lalu ke kanan dua kali lalu ke atas lalu ke kanan lalu ke atas.

Maka persoalan di atas adalah mencari banyaknya susunan 12111211212 yang merupakan permutasi berulang 11 angka dengan terdapat 7 angka 1 yang sama dan 4 angka 2 yang sama.
Banyaknya susunan adalah $\frac{11!}{7!\cdot 4!}$ = 330.
Jadi, banyaknya cara jalan terpendek yang dapat dipilih orang tersebut adalah 330.

3) Permutasi Siklis
Bagaimana jika terdapat beberapa orang yang duduk dalam suatu lingkaran (siklis) ? Ada berapa cara menyusun semuanya ? Persoalan inilah yang berhubungan dengan permutasi siklis.
Misalkan tersedia n unsur yang berbeda.
Banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut dirumuskan dengan :

$$P(\text{siklis}) = (n - 1)! \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.B.3.1)$$

Contoh 20 :
Jika terdapat tiga orang yang duduk pada tiga kursi yang membentuk suatu lingkaran, maka ada berapa banyak susunan yang mungkin terjadi ?

Solusi :
Jika mereka duduk pada kursi yang sejajar maka dengan kaidah perkalian didapat banyaknya susunan adalah 3 x 2 x 1 = 6. Atau jika dengan permutasi didapat ${}_3P_3$ = 6.
Tetapi karena kursi yang mereka duduki membentuk lingkaran maka hal tersebut berbeda.

Perhatikan gambar di bawah!

Gambar 1 Gambar 2

Pada gambar 1, jika kita membacanya searah jarum jam maka :
a. Jika A sebagai urutan pertama maka didapat susunan ABC
b. Jika B sebagai urutan pertama maka didapat susunan BCA
c. Jika C sebagai urutan pertama maka didapat susunan CAB
Ketiga susunan ABC, BCA dan CAB adalah susunan yang sama yang dalam permutasi siklis baru dianggap sebagai satu susunan.

Pada gambar 2, jika kita membacanya searah jarum jam maka :
a. Jika A sebagai urutan pertama maka didapat susunan ACB
b. Jika B sebagai urutan pertama maka didapat susunan BAC
c. Jika C sebagai urutan pertama maka didapat susunan CBA
Ketiga susunan ACB, BAC dan CBA adalah susunan yang sama yang dalam permutasi siklis sehingga baru dianggap sebagai satu susunan.

Banyaknya susunan 3 orang yang duduk pada kursi yang membentuk lingkaran = (3 – 1)! = 2! = 2 susunan.

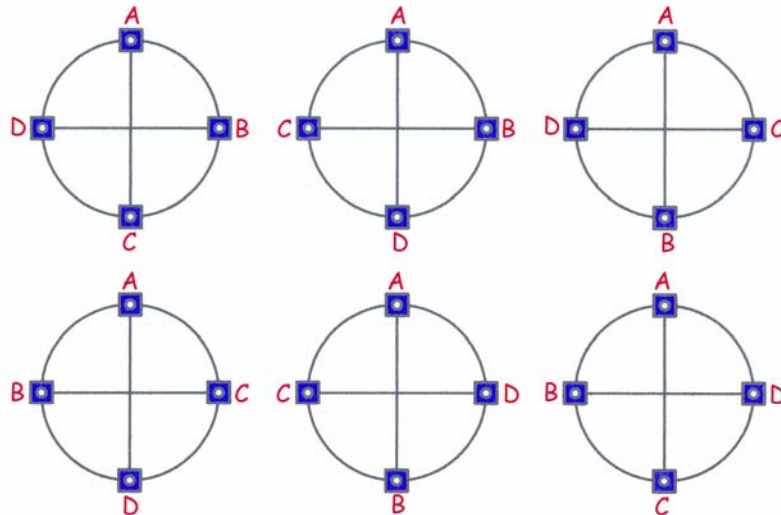
Kalau kita perhatikan hal tersebut, maka didapat langkah-langkah dalam membuat suatu susunan pada permutasi siklis adalah :

1. Tetapkan sebuah obyek (unsur) sebagai pedoman
2. Kemudian permutasikan unsur-unsur yang tersisa seperti pada persoalan sebelumnya.

Pada contoh 20 kita misalkan A sebagai patokan, maka sisanya dapat kita permutasikan (dapat juga diselesaikan dengan aturan pengisian tempat atau kaidah perkalian). Sisa unsur yang ada tinggal 2 yaitu A dan B. Banyaknya susunan B dan C adalah 2 x 1 = 2, yaitu BC dan CB. Maka semua susunan yang mungkin adalah ABC dan ACB.

Contoh 21 :
Jika terdapat empat orang yang duduk pada empat kursi yang membentuk suatu lingkaran, maka ada berapa banyak susunan yang mungkin terjadi ?

Solusi :
Dengan rumus kita dapatkan banyaknya susunan adalah (4 – 1)! = 3! = 6 susunan.
Jika kita misalkan keempat orang tersebut adalah A, B, C dan D dan kita misalkan A sebagai pedoman, maka tiga unsur sisanya yaitu B, C dan D dapat disusun dengan 3 x 2 x 1 = 6 cara yaitu BCD, BDC, CBD, CDB, DBC dan DCB.

Jadi kemungkinan susunan empat orang tersebut adalah ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC dan ADCB. Gambar berikut merupakan susunan ke-6 kemungkinan tersebut.

LATIHAN 1.B

1. Tentukan nilai n yang yang memenuhi persamaan $\frac{(n+5)!}{(n+4)!}$ = 6n.

2. Jika diketahui $_nP_4 = 30 \cdot {_nP_2}$, maka tentukan nilai n.

3. Ada berapa banyaknya susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf :
   a. F, U, R, K, A, N ?
   b. D, E, N, N, Y ?
   c. H, A, N, S, E, N ?
   d. A, H, M, A, D, I ?

e. R, O, M, B O, N, G, A, N ?
f. O, L, I, M, P, I, A, D, E ?
g. M, A, T, E, M, A, T, I, K, A ?

4. (OSP 2006) Ada berapa banyaknya bilangan 7 angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka dari 2504224 ?

5. Banyaknya bilangan tiga angka yang memiliki sedikitnya satu buah angka 4 dan satu buah angka 5 adalah ······

6. Banyaknya bilangan 5 angka yang memenuhi hasil kali angka-angkanya sama dengan 45 ada ······

7. Dalam suatu rapat OSIS yang terdiri dari 6 orang siswa (2 di antara kakak beradik) dalam posisi melingkar. Ada berapa formasi duduk melingkar yang bisa terbentuk jika kakak beradik tersebut harus berdekatan ?

8. Sama dengan nomor 5 tetapi kakak beradik tersebut tidak boleh berdekatan.

9. (OSP 2003) Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

10. (OSP 2009) Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah. (Catatan : jika semut melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah ke belakang.)

C. Kombinasi

Definisi dari kombinasi :

Suatu kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia (tiap unsur tersebut berbeda) adalah suatu pilihan dari r unsur tadi tanpa memperhatikan urutannya.

Kata kunci yang membedakan antara kombinasi dan permutasi adalah *memperhatikan* atau *tidak memperhatikan* urutan.

Banyaknya kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia dengan $r \le n$ dirumuskan dengan:

$$_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \qquad \text{.............................} \qquad (1.C.1)$$

Dengan memperhatikan rumus di atas dan membandingkannya dengan rumus permutasi didapat bahwa $_nP_r \ge {}_nC_r$. Kapan tanda kesamaan terjadi ?

Pada buku lain penulisan $_nC_r$ dapat dituliskan dengan notasi C_r^n atau $\binom{n}{r}$ atau C(n, r) yang memiliki pengertian yang sama.

Contoh 22 :
Ada berapa banyak cara memilih 3 orang siswa dari 8 orang siswa yang akan ditunjuk sebagai Pengurus Kelas.

Solusi :
Persoalan ini berbeda dengan contoh 14. Pada contoh 14, urutan diperhatikan karena ada Ketua, Wakil Ketua dan Sekretaris. Pada contoh 22, jika kita memilih A, B dan C sebagai pengurus kelas maka hal tersebut sama saja dengan memilih A, C dan B sebagai pengurus kelas. Perhatikan bahwa urutan tidak diperhatikan.
Maka banyaknya cara ada ${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} = \frac{8x7x6x5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8x7x6}{3!}$ = 56 cara.

Contoh 23 :
Ada berapa cara membentuk tim terdiri dari 2 laki-laki dan 2 wanita yang diambil dari 8 orang laki-laki dan 6 orang wanita ?

Solusi :
Banyaknya cara memilih 2 laki-laki dari 8 laki-laki adalah ${}_8C_2$ = 28.
Banyaknya cara memilih 2 wanita dari 6 wanita adalah ${}_6C_2$ = 15.
Dengan kaidah perkalian, maka banyaknya cara membentuk tim terdiri dari 2 laki-laki dan 2 wanita yang diambil dari 8 orang laki-laki dan 6 orang wanita adalah 28 x 15 = 420 cara.

Contoh 24 :
Ada berapa banyak cara memilih secara acak 2 bola merah, 3 bola putih dan 1 bola kuning dari dalam kotak yang berisi 5 bola merah, 4 bola putih, 3 bola kuning dan 4 bola hijau ?

Solusi :
Banyaknya cara memilih 2 bola merah dari 5 bola merah adalah ${}_5C_2$ = 10.
Banyaknya cara memilih 3 bola putih dari 4 bola putih adalah ${}_4C_3$ = 4.
Banyaknya cara memilih 1 bola kuning dari 3 bola kuning adalah ${}_3C_1$ = 3.
Maka banyaknya cara memilih 2 bola merah, 3 bola putih dan 1 bola kuning adalah 10 x 4 x 3 = 120 cara.

Contoh 25 :
Jika terdapat 8 siswa dan 7 siswi maka ada berapa cara membentuk panitia beranggotakan 7 orang dengan syarat sedikitnya 5 siswi harus masuk dalam kepanitiaan tersebut ?

Solusi :
Karena sedikitnya 7 orang panitia tersebut terdiri dari 5 siswi, maka akan ada tiga kasus dalam persoalan ini yaitu panitia terdiri dari 5 siswi dan 2 siswa atau 6 siswi dan 1 siswa atau semuanya siswi.
Banyaknya susunan kasus pertama adalah ${}_7C_5$ x ${}_8C_2$ = 588
Banyaknya susunan kasus kedua adalah ${}_7C_6$ x ${}_8C_1$ = 56
Banyaknya susunan kasus ketiga adalah ${}_7C_7$ x ${}_8C_0$ = 1
Maka banyaknya cara membentuk panitia adalah 588 + 56 + 1 = 645.

Contoh 26 :
Seorang siswa harus menjawab 8 soal dari 10 soal yang diujikan dengan 5 soal pertama harus dijawab. Ada berapa cara siswa tersebut untuk memilih soal-soal yang akan dikerjakan ?

Solusi :
Lima soal pertama harus dikerjakan yang berarti bukan merupakan pilihan. Maka siswa tersebut hanya memilih 3 soal dari 5 soal tersisa. Banyaknya cara memilih = ${}_5C_3$ = 10.

Contoh 27 :
Ada berapa cara memilih 3 huruf berbeda apabila disyaratkan bahwa huruf-huruf tersebut terdiri dari sedikitnya 1 vokal dan sedikitnya satu konsonan ?

Solusi :
Kemungkinan kata tersebut terdiri dari 2 vokal 1 konsonan atau 1 vokal 2 konsonan.
Kemungkinan pertama menghasilkan kata sebanyak ${}_5C_2 \times {}_{21}C_1 = 210$
Kemungkinan kedua menghasilkan kata sebanyak ${}_5C_1 \times {}_{21}C_2 = 1050$
Banyaknya kata = 210 + 1050 = 1260
Jika huruf-hurufnya tidak harus berbeda maka banyaknya kata yang dapat terbentuk = 1260.

Contoh 28 :
Jika terdapat 20 titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 20 titik tersebut adalah ⋯⋯

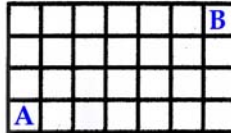
Solusi :
Segitiga dibentuk dari tiga titik yang tidak segaris.
Maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk = ${}_{20}C_3$ = 1140.

Contoh 29 :
Berapakah cacah bilangan 8 digit ($a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$) yang terdiri dari 0 dan 1 ($a_1 = 1$) dan memiliki sifat $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$?

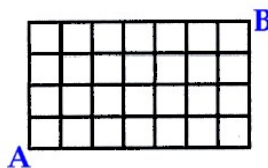
Solusi :
$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$ dengan $a_1 = 1$
Ada 4 Kasus

- Jika $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 1$
  Maka $a_3 = a_5 = a_7 = 0$ hanya ada 1 kemungkinan.
  Banyaknya tupel (a_2, a_4, a_6, a_8) yang memenuhi ada 4 yaitu (1,0,0 0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) dan (0,0,0,1).
  Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi = 1 ⋅ 4 = 4.
- Jika $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 2$
  Maka $a_3 + a_5 + a_7 = 1$. Banyaknya tripel (a_3, a_5, a_7) yang memenuhi ada 3.
  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 2$
  Banyaknya tupel (a_2, a_4, a_6, a_8) yang memenuhi = ${}_4C_2$ = 6.
  Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi = 3 ⋅ 6 = 18.
- Jika $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 3$
  Maka $a_3 + a_5 + a_7 = 2$. Banyaknya tripel (a_3, a_5, a_7) yang memenuhi = ${}_3C_2$ = 3.
  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 3$
  Banyaknya tupel (a_2, a_4, a_6, a_8) yang memenuhi = ${}_4C_3$ = 4.
  Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi = 3 ⋅ 4 = 12.
- Jika $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 4$
  Yang memenuhi hanya ada 1 yaitu 11111111.

Jadi, bilangan yang memenuhi adalah 4 + 18 + 12 + 1 = **35**.

Contoh 30 :
(OSK 2010) Diketahui grid berukuran 4 x 7. Jika langkah yang dimungkinkan Kanan, Kiri, Atas, dan Bawah. Cara menuju B dari A dalam 8 langkah atau kurang ada sebanyak ⋯ (A adalah titik pada ujung kanan atas pada kotak paling kiri bawah, sedangkan B adalah titik pada ujung kiri bawah pada kotak paling kanan atas)

Solusi :
Jalan terpendek dari A ke B adalah jika jalannya hanya Kanan dan Atas saja.
Banyaknya langkah terpendek adalah 7 sebab banyaknya langkah ke Kanan ada 5 dan ke Atas ada 2. Tidak ada jalan dengan banyaknya langkah tepat 8 sebab jika berjalan ke Kiri atau ke Bawah sekali, maka banyaknya langkah terpendek yang diperlukan adalah 9.
Jadi cukup dihitung banyaknya jalan dengan banyaknya langkah tepat 7.
Alternatif 1 :
Misalkan langkah ke Kanan diberi tanda 1 dan langkah ke Atas diberi tanda 2. Maka persoalannya sama dengan banyaknya susunan angka-angka 1111122, yaitu melangkah ke Kanan sebanyak 5 kali dan melangkah ke Atas sebanyak 2 kali.
Banyaknya susunan bilangan 1111122 sama dengan $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$ = 21.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan 21.

Alternatif 2 :
Banyaknya langkah ada 7. Dua di antaranya adalah ke Atas dan 5 ke Kanan. Maka persoalan ini adalah sama dengan menempatkan 5 obyek identik pada 7 tempat berbeda.
Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan ${}_7C_2$ = 21.
Jadi, banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan 21.

Contoh 31 :
Perhatikan gambar.

Jika seseorang akan berjalan dari titik A ke titik B melalui titik koordinat yang ada. Ada berapa banyak cara jalan terpendek yang dapat dipilihnya ?

Solusi :
Ada 11 langkah yang harus dilakukan bagi orang tersebut.
Persoalan ini sama saja dengan mengisi 7 kotak dari 11 kotak yang ada dengan obyek ke kanan.
Maka banyaknya cara jalan terpendek yang dapat dipilih = ${}_{11}C_7$ = 330.
Jadi, banyaknya cara jalan terpendek yang dapat dipilih orang tersebut adalah 330.

Contoh 32 :
(OSP 2003) Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 9, 10} ?

Solusi :
Misal H = {1, 2, 3, ⋯, 9, 10}
Seandainya tidak ada syarat bahwa tidak ada dua bilangan yang berurutan maka solusi persoalan tersebut sangat mudah yaitu ${}_{10}C_3$.
Adakah cara sehingga persoalan tersebut merupakan kombinasi tanpa adanya syarat seperti pada soal tersebut ?
Misalkan (a, b, c) adalah 3 bilangan dari H yang memenuhi bahwa tidak ada 2 bilangan di antaranya yang berurutan serta $a < b < c$. Maka syarat yang harus dipenuhi adalah $b - a \geq 2$ dan $c - b \geq 2$ serta $c \leq 10$ dan $a \geq 1$.
Seandainya dibuat tiga bilangan (a, b – 1, c – 2) maka tiga bilangan tersebut haruslah merupakan tiga bilangan yang berbeda dan merupakan elemen dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8} serta tidak memiliki syarat seperti pada soal. Maka kita dapat memodifikasi persoalan menjadi hal yang lebih sederhana. Persoalan hasil modifikasi adalah menentukan tiga bilangan asli berbeda yang diambil dari 8 bilangan asli berbeda.
Banyaknya cara memilih 3 bilangan dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8} adalah ${}_8C_3 = 56$

Rumus kombinasi (*rumus 1.C.1*) tersebut dapat digunakan untuk menghitung banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari beberapa unsur dari suatu himpunan. Untuk menghitung banyaknya himpunan bagian dari suatu himpunan (termasuk himpunan kosong, dilambangkan dengan { } atau ∅) yang terdiri dari n unsur atau elemen telah dipelajari sewaktu SLTP yang dirumuskan dengan :

Banyaknya himpunan bagian A = 2^n .... (1.C.2)

Contoh 33 :
Misalkan himpunan A = {a, b, c, d}. Ada berapa banyak himpunan bagian A ? Sebutkan ?

Solusi :
Banyaknya himpunan bagian A = $2^4 = 16$ terdiri dari :
Himpunan kosong yaitu { } ada 1.
Himpunan bagian terdiri dari 1 elemen yaitu {a}, {b}, {c} dan {d} ada 4.
Himpunan bagian terdiri dari 2 elemen yaitu {a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d} dan {c, d} ada 6.
Himpunan bagian terdiri dari 3 elemen yaitu {a, b, c}, {a, b, d}, {a, c, d} dan {b, c, d} ada 4.
Himpunan bagian terdiri dari 4 elemen yaitu {a, b, c, d} ada 1

Bagaimana bila kita hanya ingin menghitung banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen saja ? Misalkan A adalah himpunan yang terdiri dari n elemen. Banyaknya himpunan bagian terdiri dari r elemen dirumuskan dengan :

Banyaknya himpunan bagian A yang terdiri dari r elemen = ${}_nC_r$ .... (1.C.3)

Pada contoh 33 didapat banyaknya himpunan bagian A yang terdiri dari 3 elemen = ${}_4C_3 = 4$. Banyaknya himpunan bagian A yang terdiri dari 2 elemen = ${}_4C_2 = 6$.

Contoh 34 :
Ada berapa banyaknya himpunan bagian dari kata OLIMPIADE ?

Solusi :
Banyaknya elemen dari kata OLIMPIADE ada 8 yaitu, O, L, I, M, P, A, D dan E karena huruf I muncul dua kali.
Banyaknya himpunan bagian = $2^8 = 256$

LATIHAN 1.C

1. Jika ${}_nC_3 = 2n$, maka tentukan ${}_{2n}C_7$.
2. Dari 8 pemain bulutangkis (5 di antaranya putera) akan dibentuk tim pasangan ganda campuran. Maka ada berapa pasangan ganda campuran yang dapat dibentuk ?
3. Dari sekelompok remaja terdiri atas 10 orang pria dan 7 wanita akan dipilih 2 pria dan 3 wanita, maka ada berapa banyaknya cara memilih ?
4. Ada berapa banyak segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudut segitiga tersebut adalah titik sudut-titik sudut suatu balok ?
5. (OSK 2011) Sekelompok orang akan berjabat tangan. Setiap orang hanya dapat melakukan jabat tangan sekali. Tidak boleh melakukan jabat tangan dengan dirinya sendiri. Jika dalam sekelompok orang terdapat 190 jabat tangan, maka banyaknya orang dalam kelompok tersebut ada berapa ?
6. Ada berapa banyaknya himpunan bagian dari kata MATEMATIKA ?
7. Ahmadi berhasil menemukan semua himpunan bagian dari kata “BELAJARLAH”. Ada berapa banyak himpunan bagian yang jumlah anggotanya paling banyak 5 ?
8. Dari 10 orang siswa yang terdiri 7 orang putera dan 3 orang puteri akan dibentuk tim yang beranggotakan 5 orang. Jika disyaratkan anggota tim tersebut paling banyak 2 orang puteri, maka ada berapa banyak kemungkinan tim yang dapat dibentuk ?
9. SMA Negeri 5 Bengkulu akan memilih 6 orang wakil sekolah untuk mengkuti suatu kontes. Kelima wakil sekolah tersebut akan dipilih dari 6 siswa puteri dan 5 siswa putera. Jika dipersyaratkan bahwa jumlah siswa putera minimal 4 orang, ada berapa cara memilih wakil sekolah tersebut ?
10. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ····
11. Hansen memiliki 8 orang sahabat dekat dengan 2 orang di antaranya berpacaran. Pada suatu hari, ia ingin mengundang 5 dari 8 sahabat dekatnya tersebut. Dengan berapa cara ia dapat mengundang jika 2 orang sahabatnya yang berpacaran harus diundang keduanya atau tidak mengundang keduanya ?
12. Sebuah kelas akan mengikuti lomba Futsal. Dari 12 orang siswa putera akan dipilih 2 orang berposisi sebagai kiper, 4 orang sebagai pemain belakang dan 3 orang sebagai penyerang dan tidak ada pemain yang merangkap pada posisi lain. Ada berapa cara memilihnya ?
13. (OSP 2005/OSK 2008) Ada berapa banyak himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
14. (OSK 2010) Banyaknya himpunan X yang memenuhi
$$\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$$
adalah ····
15. Dalam sebuah grup 15 anak-anak terdapat 7 pramuka. Dalam berapa cara kita dapat memilih 12 anak sehingga di dalamnya terdapat
   a. tepat 6 anak pramuka
   b. sedikitnya 6 anak pramuka

16. Liga Italia terdiri dari 20 tim dan berlaku format kompetisi dengan sistem *Home and Away* (di antara 2 tim tepat terjadi dua pertandingan). Ada berapa banyak pertandingan keseluruhan ? Dalam suatu pertandingan tim yang memenangkan pertandingan mendapatkan nilai 3, yang kalah 0 dan seri mendapatkan nilai 1. Pada akhir kompetisi jumlah nilai seluruh tim adalah 1000. Ada berapa pertandingan yang berakhir dengan imbang ?

17. (NAHC 1995-1996 First Round) Berapa banyakkah bilangan terdiri dari 7 digit berbeda yang jika dilihat dari kiri ke kanan maka digitnya selalu naik ? Contoh bilangan tersebut adalah : 1234567, 1356789, 2345789, 3456789, 1235678. Digit 0 tidak diperbolehkan terletak pada digit pertama.

18. Semua bilangan enam angka dengan semua angkanya berbeda disusun. Pada masing-masing bilangan memenuhi setiap angka selain angka awal bersifat kurang dari angka yang ada di kanannya. Contoh bilangan tersebut adalah 123457, 134678, 346789, dan sebagainya. Jika semua bilangan tersebut disusun dari bilangan terkecil sampai ke terbesar, maka bilangan yang berada di urutan ke-45 adalah ⋅⋅⋅⋅

19. Banyaknya bilangan asli berbentuk $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1$ dimana $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ dan $n \ge 2$ ada ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

20. (OSP 2010) Bilangan enam digit $\overline{abcdef}$ dengan $a > b > c \ge d > e > f$ ada sebanyak ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

21. Naek mencoba meletakkan 4 buah pion identik pada sebuah papan catur 4 x 4. Ada berapa cara ia meletakkan keempat pion tersebut ?

22. Lain lagi yang dilakukan Sutan. Ia mencoba meletakkan dua pion putih identik dan 2 pion hitam identik pada papan catur 4 x 4. Ada berapa cara ia meletakkan keempat pion tersebut ?

23. (OSN 2011 SMP/MTs) Seorang calon dokter diharuskan magang di rumah sakit selama lima hari pada bulan Juli 2011. Pimpinan rumah sakit memberikan aturan sebagai berikut :
    a. Magang tidak boleh dilakukan dua hari berturut-turut
    b. Magang hari kelima baru boleh dilakukan setelah empat hari terhitung sejak magang hari keempat. Misalkan magang hari keempat adalah tanggal 20, maka magang hari kelima baru boleh dilaksanakan setidaknya pada tanggal 24.

    Tentukan banyak pilihan jadwal yang mungkin bagi calon dokter tersebut.

24. (AIME 1983) Ada berapa banyak bilangan 4 angka dengan angka pertama 1 dan tepat memiliki dua angka yang sama ? (Contoh bilangan tersebut adalah 1447, 1050, 1231 dan sebagainya)

25. Sebuah persegi panjang dengan ukuran 6 x 5 dibagi menjadi 30 persegi satuan. Banyaknya persegi panjang (termasuk persegi) yang dapat dibuat pada persegi panjang tersebut adalah ⋅⋅⋅⋅

26. (OSK 2010) Misalkan persegi 4 x 4 akan diberi warna hitam dan putih pada tiap kotaknya. Cara pewarnaan sedemikian sehingga warna hitam hanya diberikan pada 3 kotak dan sisanya warna putih sebanyak ⋅⋅⋅⋅⋅⋅ (Pewarnaan dianggap sama jika didapat dari hasil rotasi yang sama terhadap persegi 4 x 4)

27. Di dalam sebuah pesta, 5 orang teman akan saling memberikan masing-masing satu hadiah sehingga setiap orang akan memberi dan menerima hanya satu (tentunya tidak akan ada orang yang akan menerima hadiah dari dirinya). Berapakah jumlah cara yang mungkin dilakukan?

28. (OSP 2009) Misalkan N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan

$$S = \left\{ n \in N \left| \frac{n^{2009} + 2}{n+1} \in N \right. \right\}$$

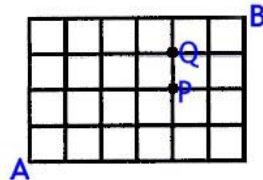
Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ⋯⋯⋯

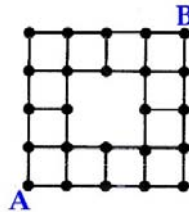
29. Jika terdapat 20 titik dengan 5 titik berada pada satu garis lurus, maka banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 20 titik tersebut adalah ⋯⋯

30. Pada ruas AB dari segitiga ABC diberi 2 titik selain AB dan pada ruas BC diberi 3 titik selain BC serta pada ruas AC diberi 4 titik selain AC. Banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya merupakan titik-titik yang ada pada segitiga ABC tersebut adalah ⋯⋯

31. Pak Eddy mencoba membagi 6 orang siswa menjadi 2 kelompok yang masing-masing beranggota tiga orang. Berapa banyakkah cara membentuk kedua kelompok ini ?

32. (OSK 2003) Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini ?

33. Sebuah benda akan digerakkan dari titik A(0,0) ke titik B(6,4) namun benda tersebut hanya dapat bergerak ke atas ke kanan melalui titik-titik koordinat.

    a. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B ?
    b. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui titik P(4,2) ?
    c. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui ruas PQ dengan Q(4,3) ?

34. Seseorang akan melangkah dari A ke B melalui titik koordinat pada persegi 4 x 4 seperti pada gambar. Jika diinginkan banyaknya langkah adalah minimal maka banyaknya cara orang tersebut melangkah dari A ke B adalah ⋯⋯

35. (OSP 2011) Pada ruang Cartesius kita ingin bergerak dari titik (2, 0, 11) ke titik (20, 1, 1) selalu pada koordinat (x, y, z) dengan paling sedikit dua dari x, y, dan z adalah bilangan bulat, dan lintasan terpendek. Cara bergerak yang dimaksud sebanyak ⋯⋯

36. (OSP 2011) Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c, dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan a + b = c + d ada sebanyak ⋯⋯

37. (OSP 2011) Diketahui segi empat ABCD. Semua titik A, B, C, dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak ⋯⋯

38. (OSP 2011) Sepuluh orang siswa duduk dalam suatu baris. Semua siswa bangkit dan duduk kembali pada baris tersebut dengan aturan setiap siswa dapat duduk kembali pada kursi yang sama atau pada kursi yang berada di sebelah kursi lamanya. Banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak ⋯⋯

39. Sebuah komite mengadakan 40 pertemuan dengan 10 orang anggota komite hadir pada masing-masing pertemuan. Setiap dua orang anggota komite menghadiri pertemuan secara bersamaan paling banyak satu kali. Tunjukkan banyaknya anggota komite tersebut lebih dari 60.

D. Persoalan Gabungan

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya bahwa sebuah persoalan terkadang bisa diselesaikan dengan hanya menggunakan salah satu cara dari aturan pengisian tempat, permutasi atau kombinasi saja. Tetapi kadang-kadang sebuah persoalan hanya dapat diselesaikan dengan menggunakan gabungan dari beberapa cara tersebut. Berikut beberapa contoh persoalan.

Contoh 35 :
Ada berapa banyak cara memilih 2 orang wanita dari 5 orang wanita dan 2 orang laki-laki dari 6 orang laki-laki sebagai ketua, wakil ketua dan 2 orang kepala seksi dari suatu organisasi dengan syarat bahwa ketua dan wakil ketua harus laki-laki dan 2 orang kepala seksi harus wanita ?

Solusi :
2 orang laki-laki dipilih dari 6 orang laki-laki sebagai ketua dan wakil ketua yang berarti urutan diperhatikan. Maka banyaknya cara memilih ada ${}_6P_2$ = 30 cara.
2 orang wanita dipilih dari 5 orang wanita sebagai kepala seksi yang berarti urutan tidak diperhatikan. Maka banyaknya cara memilih ada ${}_5C_2$ = 10 cara.
Jadi, banyaknya cara memilih ada 30 x 10 = 300 cara.

Contoh 36 :
Dari lima orang siswa suatu sekolah, akan diambil tiga orang sebagai tim cerdas cermat dengan salah satu sebagai juru bicara dan dua lainnya sebagai pendamping. Ada berapa cara memilihnya ?

Solusi :
Jika kita menjawab bahwa banyaknya cara dari persoalan di atas adalah ${}_5P_3$ = 60 cara, maka ada kesalahan yang kita buat. Benar jika dikatakan bahwa terdapat urutan karena ada yang berperan sebagai juru bicara dan ada yang berperan sebagai pendamping tetapi dua orang yang berperan sebagai pendamping tidak diperhatikan urutannya. Sebagai ilustrasi adalah jika A sebagai juru bicara, B dan C sebagai pendamping maka hal tersebut sama dengan A sebagai juru bicara, C dan B sebagai pendamping yang berarti urutan pada pemilihan pendamping tidak diperhatikan.
Jika kita menjawab bahwa banyaknya cara dari persoalan di atas adalah ${}_5C_3$ = 10 cara, maka kesalahan yang dibuat adalah bahwa pada pemilihan juru bicara dan pendamping ada urutan yang diperhatikan. Sebagai ilustrasi jika A sebagai juru bicara, B dan C sebagai pendamping berbeda dengan B sebagai juru bicara, A dan C sebagai pendamping.
Berikut adalah beberapa alternatif penyelesaian soal tersebut dengan beberapa sudut pandang yang berbeda.

Alternatif 1 :
Dari 5 orang siswa kita pilih salah satu satu siswa yang akan berperan sebagai juru bicara. Karena hanya ada satu yang dipilih maka dapat dipandang sebagai permutasi maupun kombinasi. Banyaknya cara adalah ${}_5C_1$ atau ${}_5P_1$ = 5 cara.

Sisanya adalah memilih dua siswa dari 4 siswa yang akan berperan sebagai pendamping. Karena urutan tidak diperhatikan maka banyaknya cara adalah ${}_4C_2$ = 6 cara.
Dengan kaidah perkalian banyaknya cara memilih adalah 5 x 6 = 30 cara.

Alternatif 2 :
Yang dipilih terlebih dahulu adalah 2 orang siswa dari 5 siswa yang berperan sebagai pendamping. Karena urutan tidak diperhatikan maka banyaknya cara adalah ${}_5C_2$ = 10 cara.
Selanjutnya adalah memilih 1 siswa dari 3 siswa yang berperan sebagai juru bicara. Banyaknya cara ada 3 cara.
Dengan kaidah perkalian banyaknya cara memilih adalah 10 x 3 = 30 cara.

Alternatif 3 :
Terlebih dahulu dipilih 3 siswa dari 5 siswa tersebut tanpa memperhatikan urutan. Banyaknya cara adalah ${}_5C_3$ = 10 cara.
Dari 3 orang tersebut akan disusun. Pada susunan tersebut akan terdapat dua obyek yang sama. Hal ini sama saja dengan menyusun huruf A, A, B sebagaimana telah dijelaskan pada persoalan sebelumnya. Banyaknya cara menyusuan 3 obyek dengan terdapat 2 obyek yang sama = $\frac{3!}{2!}$ = 3 cara.
Dengan kaidah perkalian banyaknya cara memilih adalah 10 x 3 = 30 cara.

Contoh 37 :
Dari 4 orang akan dipilih 3 orang yang akan duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran. Ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat ?

Solusi :
Langkah pertama adalah memilih 3 orang dari 4 orang, banyaknya cara adalah ${}_4C_3$ = 4 cara.
Banyaknya cara menyusun 3 orang yang duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran adalah (3 − 1)! = 2 cara.
Dengan kaidah perkalian banyaknya cara menyusun 3 orang dari 4 orang yang akan duduk pada 3 kursi yang membentuk lingkaran adalah 4 x 2 = 8 cara. Dapatkah ada menyebutkan semua kemungkinan tersebut jika keempat orang tersebut adalah A, B, C dan D.

Contoh 38 :
Sebuah bangun segienam beraturan dibagi menjadi 6 buah segitiga sama sisi. Keenam segitiga tersebut akan diberi warna yang berbeda. Jika terdapat 2007 bangun segienam beraturan serta diinginkan tidak ada corak yang sama di antara dua buah bangun segienam, maka ada berapa minimal warna yang diperlukan ?

Solusi :
Sebuah bangun segienam beraturan jika dibagi menjadi 6 buah segitiga sama sisi, maka keenam segitiga tersebut akan membentuk lingkaran.
Enam buah warna jika digunakan untuk mewarnai satu buah segienam beraturan maka banyaknya corak yang dapat dibentuk adalah (6 − 1)! = 120.
Misalkan ada n buah warna. Dari n warna ini akan dipilih 6 buah warna. Banyaknya cara ${}_nC_6$.
Maka jika ada n buah warna maka banyaknya corak yang dapat dibentuk = ${}_nC_6 \cdot (6-1)! \geq 2007$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6} \geq 2007$

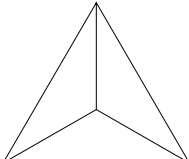
$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \geq 12042$

Jika n = 7 maka $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 5040 \leq 12042$

Jika n = 8 maka $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 20160 \geq 12042$

Maka banyaknya warna minimal yang diperlukan = 8 warna.

Contoh 39 :
Tentukan banyaknya susunan 3 huruf yang terdapat pada kata COMBINATION ?

Solusi :
Terdapat 8 huruf berbeda dari combination yaitu C, O, M, B, I, N, A, T.
Ada terdapat 2 buah huruf O yang sama, 2 buah huruf I yang sama dan 2 buah huruf N yang sama.
Susunan 3 huruf tersebut dapat berupa ketiga-tiganya berbeda huruf atau dari tiga huruf tersebut terdapat 2 huruf yang sama dan 1 huruf berbeda tetapi tidak mungkin ketiganya hurufnya sama.

- Jika ketiga hurufnya berbeda.
  Banyaknya susunan adalah sama dengan memilih 3 huruf dari 8 huruf berbeda yang ada.
  Banyaknya susunan = ${}_8P_3$ = 336
- Jika terdapat 2 huruf yang sama.
  2 huruf yang sama tersebut dapat dipilih dari 3 kemungkinan O, I atau N sedangkan 1 huruf terakhir dapat dipilih dari 7 kemungkinan huruf tersisa.
  Susunan 3 huruf dengan 2 huruf yang sama tersebut merupakan permutasi dengan ada unsur yang sama.
  Banyaknya susunan 3 huruf dengan 2 huruf yang sama pada soal = $\frac{3!}{2!}$ x 3 x 7 = 63

Maka banyaknya susunan 3 huruf yang terdapat pada COMBINATION = 336 + 63 = 399.

LATIHAN 1.D

1. Kelompok A terdiri dari 3 orang, kelompok B terdiri dari 5 orang dan kelompok C terdiri dari 10 orang. Dari anggota kelompok A dan B masing-masing akan dipilih 1 orang sedangkan dari kelompok C akan dipilih 2 orang. Keempat orang tersebut akan dipilih kembali untuk menjabat sebagai Ketua, Wakil Ketua dan 2 orang Sekretaris. Ada berapa banyak cara memilih dari 18 orang tersebut ?

2. (OSN 2003) Balairung sebuah istana berbentuk segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 meter. Lantai balairung tersebut ditutupi dengan ubin-ubin keramik berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 50 cm. Setiap ubin keramik dibagi ke dalam 3 daerah segitiga yang kongruen, lihat gambar. Setiap daerah segitiga diberi satu warna tertentu sehingga setiap ubin memiliki tiga warna berbeda. Raja menginginkan agar tidak ada dua ubin yang memiliki pola warna sama. Paling sedikit berapa warna yang diperlukan ?

3. Ada berapa banyak susunan 5 huruf dengan tepat 1 huruf R dan 1 huruf I jika huruf-huruf tersebut diambil dari kata “BERANI” ?

4. Lima huruf yang tidak harus berbeda diambil dari kata SOEHARTO lalu disusun. Ada berapa banyak susunan kelima huruf tersebut ?

5. Hansen mencoba menyusun 4 huruf yang huruf-hurufnya diambil dari kata TERCECER. Ada berapa susunan yang didapat ?

6. Denny mencoba menyusun 4 huruf yang huruf-hurufnya diambil dari kata MATEMATIKA. Ada berapa susunan yang didapat ?

E. Kombinasi dengan Pengulangan

Misalkan ada n obyek yang akan diletakkan pada r tempat tanpa urutan dengan $r \leq n$. Jika disyaratkan bahwa satu tempat hanya bisa menampung paling banyak 1 obyek maka banyaknya cara adalah ${}_nC_r$ yang telah kita bahas sebelumnya.

Misalkan terdapat n obyek identik dan disyaratkan bahwa seluruh obyek akan dibagikan ke r buah tempat dengan masing-masing tempat dapat tidak ditempati maupun ditempati satu atau lebih obyek. Pertanyaannya adalah ada berapa banyak cara menyusunnya ?

Karena identik maka urutan dalam persoalan ini tidak diperhatikan. Taruh n obyek tersebut dalam satu baris. Tambakan r − 1 batas di antara bola-bola tersebut sehingga kini seolah-olah ada n + r − 1 'tempat'. Akibat penambahan r − 1 batas tersebut maka n bola tersebut akan terbagi dalam r bagian, yaitu di sebelah kiri batas ke-1, di antara batas ke-1 dan ke-2 sampai dengan di sebelah kanan batas ke-(r − 1). Masing-masing bagian tersebut melambangkan banyaknya bola pada masing-masing tempat. Sehingga persoalannya sekarang adalah memilih (r − 1) tempat dari n + r − 1 tempat yang tersedia. Banyaknya cara adalah

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

Contoh 40 :

4 buah bola akan dibagikan seluruhnya ke dalam 3 buah kantong. Ada berapa banyak cara menyusunnya ?

Solusi :

Sebagaimana penjelasan sebelumnya, banyaknya cara = ${}_{4+3-1}C_4 = {}_6C_4 = 15$ cara. Yang kalau dijabarkan susunannya adalah (4,0,0), (3,1,0), (3,0,1), (2,2,0), (2,0,2), (2,1,1), (1,3,0), (1,2,1), (1,1,2), (1,0,3), (0,4,0), (0,3,1), (0,2,2), (0,1,3) dan (0,0,4) dengan (a,b,c) menyatakan kantong pertama berisi a bola, kantong ke-2 berisi b bola dan kantong ke-3 berisi c bola.

Kombinasi dengan pengulangan juga dapat menyelesaikan persoalan mengenai perhitungan banyaknya penyelesaian persamaan linier. Misalkan saja terdapat persamaan $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$. Jika x_i merupakan bilangan bulat tak negatif, maka ada berapa banyak penyelesaian yang memenuhi. Persoalan ini sama saja dengan membagi n obyek identik ke dalam r buah tempat. Banyaknya penyelesaian adalah ${}_{n+r-1}C_n$.

Contoh 41 :

Tentukan banyaknya tupel bilangan bulat tak negatif (x_1, x_2, x_3, x_4) yang memenuhi persamaan linier $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$?

Solusi :

Dari penjelasan sebelumnya akan didapat banyaknya tupel bilangan bulat tak negatif yang memenuhi adalah ${}_{3+4-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$. Tupel (x_1, x_2, x_3, x_4) yang memenuhi adalah (0,0,0,3), (0,0,1,2), (0,0,2,1), (0,0,3,0), (0,1,0,2), (0,1,1,1), (0,1,2,0), (0,2,0,1), (0,2,1,0), (0,3,0,0), (1,0,0,2), (1,0,1,1), (1,0,2,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0), (1,2,0,0), (2,0,0,1), (2,0,1,0), (2,1,0,0) dan (3,0,0,0).

Misalkan terdapat n obyek berbeda yang akan diletakkan pada r tempat. Jika diperbolehkan ada pengulangan obyek yang akan ditempatkan serta urutan diperhatikan, maka banyaknya cara = n^r. Persoalan ini sudah dibahas sebelumnya. Sebagai contoh adalah menentukan banyaknya bilangan 3 angka dengan angka-angkanya diambil dari 1, 2, 3, 4 dengan bolehnya ada angka yang berulang. Banyaknya bilangan ada $4^3 = 64$, yaitu 111, 112, 113, 114, 121, 122, ⋯, 444. Bilangan 112, 121 dan 211 diangap berbeda. Bagaimana persoalannya jika 112, 121, 211 dianggap sama karena urutannya tidak diperhatikan ?

Pandang n obyek tersebut sebagai 'tempat'. Persoalannya adalah seperti menempatkan r 'obyek' identik pada n 'tempat'. Banyaknya cara adalah ${}_{r+n-1}C_r$.

Contoh 42 :
Dua angka dipilih dari himpunan {1, 2, 3, 4} dengan pengulangan diperbolehkan. Ada berapa cara memilih dua angka tersebut ?
Solusi :
Pandang 4 buah kantong. Dua bola akan ditempatkan pada kantong-kantong tersebut. Jika bola tersebut ditempatkan pada kantong 1 dan 4 maka berarti angka-angka yang dipilih adalah (1, 4). Jika kedua bola tersebut ditempatkan pada kantong 3 maka berarti angka yang dipilih adalah (3, 3).
Banyaknya cara memilih = ${}_{2+4-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$.
Pasangan angka-angka tersebut (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4) dan (4,4).

LATIHAN 1.E

1. (OSP 2004) Berapakah banyaknya barisan bilangan bulat tak negatif (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ?

2. Sebuah toko memiliki 10 buah balon merah, 9 buah balon kuning dan 11 buah balon hijau. Seorang pembeli ingin membeli 8 buah balon. Ada berapa banyak cara pembeli tersebut membeli balon ?

3. Tentukan banyaknya tupel bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi a + b + c + d = 17.

4. Tentukan banyaknya tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 18 dengan syarat $x \geq 3$; $y \geq 4$ dan $z \geq 5$.

5. (OSP 2009) Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak ⋯⋯

6. Tentukan banyaknya tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 9 dengan syarat $0 \leq x \leq 4$; $0 \leq y \leq 5$ dan $0 \leq z \leq 3$.

7. Tentukan banyaknya bilangan 5 angka yang jumlah digitnya sama dengan 5.

F. Penjabaran Binom Newton dengan Notasi Kombinasi

Pada saat SMP, siswa telah diajarkan menjabarkan bentuk $(a + b)^n$ yang untuk nilai n = 2 dapat dilakukan dengan perkalian langsung sedangkan untuk n yang besar dapat dilakukan dengan menggunakan segitiga pascal untuk mendapatkan koefisien-koefisien penjabaran.

Untuk n = 1   1 1
Untuk n = 2   1 2 1
Untuk n = 3   1 3 3 1
Untuk n = 4   1 4 6 4 1
Untuk n = 5   1 5 10 10 5 1
...

Bilangan yang di bawah merupakan penjumlahan dua bilangan di atasnya. Dari segitiga pascal tersebut akan didapat

$(a - 2b)^5 = (1)(a)^5(-2b)^o + (5)(a)^4(-2b)^1 + (10)(a)^3(-2b)^2 + (10)(a)^2(-2b)^3 + (5)(a)^1(-2b)^4 + (1)(a)^0(-2b)^5$
$(a - 2b)^5 = a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$

Cara lain adalah dengan menggunakan rumus kombinasi.
Jika $(a + b)^n$ kita jabarkan akan didapat rumus sebagai berikut :

$(a + b)^n = {}_nC_o(a)^n(b)^0 + {}_nC_1(a)^{n-1}(b)^1 + {}_nC_2(a)^{n-2}(b)^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}(a)^1(b)^{n-1} + {}_nC_n(a)^0(b)^n$ ………….. (1.E.1)

atau dapat juga ditulis

$(a + b)^n = {}_nC_o(a)^0(b)^n + {}_nC_1(a)^1(b)^{n-1} + {}_nC_2(a)^2(b)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-1}(a)^{n-1}(b)^1 + {}_nC_n(a)^n(b)^0$ ………… (1.E.2)

Contoh 43 :
Jabarkan $(2m + n)^5$.

Solusi :
$(2m + n)^5 = {}_5C_o(2m)^5(n)^0 + {}_5C_1(2m)^4(n)^1 + {}_5C_2(2m)^3(n)^2 + {}_5C_3(2m)^2(n)^3 + {}_5C_4(2m)^1(n)^4 + {}_5C_5(2m)^0(n)^5$
$(2m + n)^5 = (1)(32m^5)(1) + (5)(16m^4)(n) + (10)(8m^3)(n^2) + (10)(4m^2)(n^3) + (5)(2m)(n^4) + (1)(1)(n^5)$
$(2m + n)^5 = 32m^5 + 80m^4n + 80m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$

Contoh 44 :
Jabarkan bentuk $(2x - 3y)^3$

Solusi :
$(2x - 3y)^3 = {}_3C_o(2x)^3(-3y)^0 + {}_3C_1(2x)^2(-3y)^1 + {}_3C_2(2x)^1(-3y)^2 + {}_3C_3(2x)^0(-3y)^3$
$(2x - 3y) = (1)(8x^3)(1) + (3)(4x^2)(-3y) + (3)(2x)(9y^2) + (1)(1)(-27y^3)$
$(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

Persoalan timbul adalah bila variabel yang akan dijabarkan tidak terdiri dari hanya 2 variabel. Sebenarnya hal ini tidak terlalu sulit sebab dengan menggunakan pemisalan maka dari beberapa variabel dapat diubah menjadi 2 variabel saja. Misalkan penjabaran $(x + y + z)^n$ dapat diubah menjadi $(A + B)^n$ dengan pemisalan A = x dan B = y + z.

Contoh 45 :
Jabarkan bentuk $(a + b + c)^3$.

Solusi :
Karena persoalannya terdiri dari 3 variabel maka dapat kita pecah seolah-olah menjadi 2 variabel yaitu a dan b + c.
$(a + b + c)^3 = {}_3C_o(a)^3(b + c)^0 + {}_3C_1(a)^2(b + c)^1 + {}_3C_2(a)^1(b + c)^2 + {}_3C_3(a)^0(b + c)^3$
Dengan menggunakan penjabaran binom sebelumnya dapat diketahui bahwa :
$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$
$(b + c)^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
Sehingga didapat :
$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b^2 + 2bc + c^2) + (b + c)^3$
$(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
Persoalan berikutnya adalah bagaimana caranya dapat diketahui koefisien dari suatu variabel tertentu tanpa harus menjabarkan semua suku-sukunya.

Contoh 46 :
Tentukan koefisien x^6y^5 dari penjabaran $(2x - 5y)^{11}$.

Solusi :
Karena yang diminta hanya koefisien x^6y^5 maka kita hanya berkonsentrasi pada penjabaran bentuk $(2x)^6(5y)^5$ saja.
$(2x - 5y)^{11} = \cdots + {}_{11}C_5\ (2x)^6(-5y)^5 + \cdots$
$(2x - 5y)^{11} = \cdots + (462)(64x^6)(-3125y^5) + \cdots$
$(2x - 5y)^{11} = \cdots - 92400000\ x^6y^5 + \cdots$
Maka koefisien x^6y^5 dari penjabaran $(2x - 5y)^{11}$ adalah -92400000.

Contoh 47 :
Apakah koefisen x^6 pada penjabaran $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$?

Solusi :
Jika $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ dijabarkan akan didapat :

$$\left(x - \tfrac{1}{x}\right)^{10} = \cdots + {}_{10}C_r\left(x\right)^{10-r}\left(-\tfrac{1}{x}\right)^r + \cdots$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10} = \cdots + {}_{10}C_r\left(-1\right)^r\left(x\right)^{10-2r} + \cdots\ .$$

Karena yang ditanyakan adalah koefisien x^6 maka harus dipenuhi $10 - 2r = 6$ sehingga $r = 2$.
Untuk $r = 2$ didapat :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10} = \cdots + {}_{10}C_2\left(-1\right)^2\left(x\right)^6 + \cdots = \cdots + 45x^6 + \cdots$$

Maka koefisen x^6 pada penjabaran $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ adalah 45.

Selain digunakan dalam penjabaran suku-suku dari suatu binom, metode yang digunakan dalam segitiga pascal juga dapat diterapkan pada suatu persoalan menarik.

Contoh 48 :
Tentukan banyaknya cara menyusun kata SUKA dari atas ke bawah pada susunan berikut jika huruf-huruf yang diambil harus berdekatan.

```
        S
      U   U
    K   K   K
  A   A   A   A
```

Solusi :
Jika dituliskan sebagaimana metode pascal didapat

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
```

Angka-angka di atas menyatakan banyaknya cara untuk sampai pada angka tersebut.
Dari angka-angka tersebut didapat banyaknya cara untuk menyusun kata SUKA = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.

Jadi, banyaknya cara menyusun kata SUKA adalah 8.

Contoh 49 :

Ada berapa banyak cara menyusun kata MATHEMATICS dimulai dari atas ke bawah jika huruf-huruf yang diambil harus berdekatan.

Solusi :

Kita ubah huruf-huruf tersebut dengan angka-angka sebagai berikut.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
6 15 20 15 6
21 35 35 21
56 70 56
126 126
252

Maka banyaknya cara menyusun kata MATHEMATICS adalah 252.

LATIHAN 1.F

1. Buktikan bahwa ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$.

2. Jabarkan bentuk $(3x - y)^6$.

3. Nur Fajri berhasil menjabarkan bentuk $(2x + 3y)^{10}$. Apakah koefisien x^6y^4 yang didapatnya ?

4. (OSP 2010) Suku konstan dari $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ adalah ·······

5. Tentukan koefisien ab^2c pada penjabaran $(a + 3b - c)^4$.

6. Tentukan koefisien $x^3y^2z^4$ pada penjabaran $(x + y - 2z)^9$.

7. Berapakah perbandingan koefisien suku x^5 dengan koefisien suku x^6 pada penjabaran $(2x + 3)^{20}$?

8. Jika $(3x - 1)^7$ dijabarkan dalam suku-sukunya akan berbentuk $a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + \cdots + a_1x + a_o$. Berapakah nilai $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$?

9. Tentukan nilai n dalam penjabaran $(1 + x)^n$ dengan $n > 1$, jika diketahui
   a. koefisien suku x^2 sama dengan koefisien suku x^3.
   b. koefisien suku x^3 sama dengan lima kali koefisien suku x^5.

10. Berapakah penjumlahan semua koefisien suku-suku pada penjabaran :
    a. $(x + y)^6$
    b. $(a - 2b)^8$

11. Tentukan nilai dari ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$.

12. (OSK 2009) Nilai eksak dari $\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \cdots + \binom{2009}{1004}$ adalah ········

13. (OSP 2010) Nilai $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right)$ = ·········

14. Tentukan banyaknya cara menyusun kata OLIMPIADE jika dimulai dari kiri atas ke kanan bawah

a.

O	L	I	M
L	I	M	P
I	M	P	I
M	P	I	A
P	I	A	D
I	A	D	E

b.

O	L	I	M	P
L	I	M	P	I
I	M	P	I	A
M	P	I	A	D
P	I	A	D	E

c.

O	L	I	M	P	I
L	I	M	P	I	A
I	M	P	I	A	D
M	P	I	A	D	E

15. (OSK 2011 Tipe 3) Koefisien x^4 dari penjabaran $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ adalah ·····

16. (AIME 1983) Tentukan sisanya jika $6^{83} + 8^{83}$ dibagi 49.

17. (AIME 1986) Suku banyak $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{15} + x^{16} - x^{17}$ dapat ditulis sebagai suku banyak dalam variabel y dengan $y = x + 1$. Koefisien dari y^2 adalah ·····

18. (AIME 2001) Tentukan penjumlahan semua akar-akar persamaan polinomial $x^{2001} + (\frac{1}{2} - x)^{2001} = 0$.

2. KEJADIAN DAN PELUANG SUATU KEJADIAN, PENGAMBILAN CONTOH DENGAN DAN TANPA PENGEMBALIAN

A. Percobaan

Misalkan kita melempar sekeping uang logam, maka kegiatan ini disebut dengan percobaan. Hasil percobaan yang didapat biasanya adalah munculnya sisi gambar, G, atau munculnya sisi tulisan, T. Sedangkan jika kita melempar sebuah dadu, maka hasil percobaan yang didapat adalah mata dadu 1, 2, 3, 4, 5 atau 6.

B. Ruang Contoh atau Ruang Sampel

Ruang contoh atau ruang sampel adalah himpunan dari semua hasil percobaan yang mungkin. Ruang contoh atau ruang sampel biasanya dilambangkan dengan S yang dalam teori himpunan disebut dengan himpunan semesta.

Pada percobaan melempar uang logam, ruang sampelnya adalah {G, T} sedangkan pada percobaan melempar satu buah dadu, ruang sampelnya adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Jika {G, T} adalah ruang sampel, maka anggota-anggota dari ruang sampel tersebut disebut titik contoh. Titik contoh dari {G, T} adalah G dan T. Pada percobaan melempar satu buah dadu, titik sampel yang didapat ada 6 yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6 sedangkan jika melempar dua buah dadu akan didapat 36 buah titik contoh, yaitu (1, 1), (1, 2), (1, 3), ···, (6, 6).

C. Kejadian

Kejadian atau peristiwa (event) adalah himpunan bagian dari ruang contoh yang dapat berupa kejadian sederhana maupun kejadian majemuk. *Kejadian sederhana* adalah suatu kejadian yang hanya mempunyai sebuah titik contoh. Jika suatu kejadian memiliki lebih dari satu titik contoh disebut dengan *kejadian majemuk*.

Kejadian munculnya mata dadu satu {1} pada percobaan melempar sebuah dadu adalah contoh kejadian sederhana. Contoh dari kejadian majemuk adalah munculnya mata dadu genap pada percobaan melempar sebuah dadu.

D. Peluang Suatu Kejadian

1) Menghitung peluang dengan pendekatan frekuensi

Dari suatu percobaan yang dilakukan sebanyak n kali, ternyata kejadian A munculnya sebanyak k kali, maka frekuensi nisbi munculnya kejadian A sama dengan

$$F(A) = \frac{k}{n} \qquad \text{..............................} \qquad (2.D.1)$$

Kalau n semakin besar dan menuju tak terhingga maka nilai F(A) akan cenderung konstan mendekati suatu nilai tertentu yang disebut dengan peluang munculnya kejadian A.

2) Menghitung peluang dengan pendekatan definisi peluang klasik

Jika kita melempar sekeping mata uang logam secara berulang-ulang, frekuensi nisbi muculnya sisi gambar maupun sisi tulisan masing-masing akan mendekati ½ sehingga dapat dikatakan bahwa sisi gambar dan sisi tulisan mempunyai kesempatan yang sama.

Misalkan dalam suatu percobaan menyebabkan dapat munculnya salah satu dari n hasil yang mempunyai kesempatan yang sama. Dari hasil n tadi, kejadian A muncul sebanyak k kali maka peluang munculnya kejadian A sama dengan

$$P(A) = \frac{k}{n} \qquad \text{..............................} \qquad (2.D.2.1)$$

Selain itu, pengertian peluang dapat juga dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan S adalah ruang contoh dari suatu percobaan dengan tiap angotanya S memiliki kesempatan muncul yang sama.
Jika A adalah suatu kejadian dengan A merupakan himpunan bagian dari S, maka peluang kejadian A sama dengan :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad \text{..............................} \qquad (2.D.2.2)$$

n(A) menyatakan banyaknya anggota dalam himpunan A
n(S) menyatakan banyaknya anggota dalam himpunan ruang contoh S.

Dari pendekatan itu semua, jika peluang suatu kejadian bernilai 0 maka artinya kejadian tersebut tidak mungkin terjadi sedangkan jika peluang suatu kejadian bernilai 1 artinya kejadian tersebut pasti terjadi. Peluang suatu kejadian akan berkisar $0 \le p(A) \le 1$.

Berikut adalah beberapa contoh persoalan menghitung peluang suatu kejadian :

Contoh 50 :
Berapa peluang kejadian munculnya angka ganjil pada percobaan melempar sebuah dadu ?

Solusi :
Pada percobaan melempar sebuah dadu bersisi enam ada 6 hasil yang mungkin muncul dan tiap hasil mempunyai kesempatan yang sama, maka n = 6.
Kejadian munculnya angka ganjil ada 3 yaitu 1, 3 dan 5. Maka k = 3.
Jadi, peluang kejadian = $P(A)$ = $\frac{k}{n}$ = $\frac{3}{6}$ = 0,5.

Contoh 51 :
Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 5 bola putih. Dari kotak diambil sebuah bola secara acak. Berapakah peluang bola yang terambil adalah :
a. berwarna merah
b. berwarna putih

Solusi :
Jumlah seluruh bola ada 9.
a. Banyaknya bola merah ada 4 maka peluang yang terambil bola merah adalah $\frac{4}{9}$.
b. Banyaknya bola putih ada 5 maka peluang yang terambil bola putih adalah $\frac{5}{9}$.

Contoh 52 :
Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng hijau dan 5 kelereng biru. Jika dari dalam kotak diambil 3 buah kelereng, maka berapa peluang :
a. semua kelereng yang terambil berwarna merah
b. semuanya biru
c. 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau
d. 1 berwarna merah, 1 hijau dan 1 biru

Solusi :
Jumlah seluruh kelereng ada 12.
Banyaknya cara memilih 3 dari 12 kelereng adalah ${}_{12}C_3$ = 220.
a. Banyaknya cara memilih 3 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah ${}_3C_3$ = 1

Peluang 3 kelereng yang terambil semuanya merah = $\frac{1}{220}$

b. Banyaknya cara memilih 3 kelereng biru dari 5 kelereng biru adalah $_5C_3$ = 10

Peluang 3 kelereng yang terambil semuanya biru = $\frac{10}{220}$ = $\frac{1}{22}$

c. Banyaknya cara memilih 2 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah $_3C_2$ = 3
Banyaknya cara memilih 1 kelereng hijau dari 4 kelereng hijau adalah $_4C_1$ = 4
Maka sesuai kaidah perkalian, banyaknya cara memilih 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau = 3 x 4 = 12

Peluang 3 kelereng yang terambil 2 buah berwarna merah dan 1 berwarna hijau = $\frac{12}{220}$

d. Banyaknya cara memilih 1 kelereng merah dari 3 kelereng merah adalah $_3C_1$ = 3
Banyaknya cara memilih 1 kelereng hijau dari 4 kelereng hijau adalah $_4C_1$ = 4
Banyaknya cara memilih 1 kelereng biru dari 5 kelereng biru adalah $_5C_1$ = 5
Maka banyaknya cara memilih 1 buah kelereng merah, 1 hijau dan 1 biru = 3 x 4 x 5 = 60

Peluang 3 kelereng yang terambil 1 berwarna merah, 1 hijau dan 1 biru = $\frac{60}{220}$

Contoh 53 :

Dua buah dua dilempar secara bersamaan. Berapakah peluang munculnya jumlah mata dadu sama dengan 9 ?

Solusi :

Himpunan semestanya ada 36 kemungkinan yaitu (1, 1), (1, 2), (1, 3), ···, (6, 6).
Banyaknya kemungkinan jumlah mata dadu kedua dadu tersebut sama dengan 9 ada 4 kemungkinan yaitu (3, 6), (4, 5), (5, 4) dan (6, 3).

Maka peluang munculnya jumlah mata dadu sama dengan 9 adalah $\frac{4}{36}$ atau $\frac{1}{9}$.

Contoh 54 :

Masing-masing satu huruf diambil dari kata “MUDAH” dan “BANGET”. Berapakah peluang bahwa kedua huruf tersebut terdiri dari satu vokal dan satu konsonan ?

Solusi :

Kemungkinannya adalah satu vokal dari kata “MUDAH” dan satu konsonan dari kata “BANGET” atau satu konsonan dari kata “MUDAH” dan satu vokal dari kata “BANGET”

Peluang kasus pertama = $\frac{2}{5} x \frac{4}{6} = \frac{4}{15}$

Peluang kasus kedua = $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{5}$

Maka peluang kejadian tersebut adalah $\frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

LATIHAN 2.D

1. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. Berapakah peluang munculnya jumlah mata dadu paling tidak 9 ?

2. Alan melempar dua buah dadu bersamaan satu kali. Berapakah peluang munculnya jumlah mata dadu ganjil dan bilangan prima ?

3. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola merah dan 5 bola putih. Jika Nindya mengambil 3 bola secara acak maka berapakah peluang terambilnya :
   a. Ketiga-tiganya merah
   b. Ketiga-tiganya putih

c. 2 bola merah dan 1 bola putih
d. 1 bola merah dan 2 bola putih
Berapakah jumlah hasil a, b, c dan d tersebut ?

4. (OSK 2006) Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah ⋯⋯

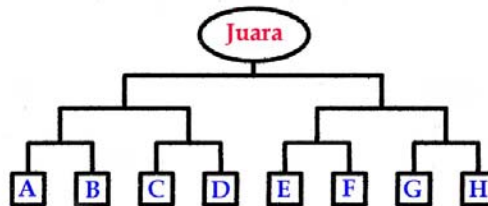
5. Satu huruf diambil secara acak masing-masing dari kata “MAKAN” dan “MANDI”. Berapakah peluang terambil dua huruf yang berbeda ?

6. Sebuah kotak berisi 2006 bola yang terdiri dari 500 bola merah, 501 bola biru, 502 bola kuning, 502 bola hijau dan 1 bola putih. Jika dari dalam kotak diambil bola satu persatu tanpa pengembalian, maka tentukan peluang bahwa tepat pada pengambilan kelima, bola tersebut adalah berwarna putih.

7. (OSP 2003) Upik melemparkan n dadu. Ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah peluang tersebut paling besar ?

8. Sepuluh buah bola masing-masing bertuliskan satu huruf dari kata MATEMATIKA. Dua bola diambil secara acak dari sepuluh bola tersebut. Peluang dua bola yang terambil bertuliskan huruf yang berbeda adalah ⋯⋯⋯

9. Denny berhasil menemukan 2007 kunci dan 1 buah peti berisi harta karun dengan 1 buah lubang kunci. Hanya ada 1 dari 2007 kunci tersebut yang bisa membuka peti harta karun. Ia memberi tanda pada kunci yang telah ia gunakan untuk mencoba membuka peti harta karun, sehingga kunci yang telah digunakan untuk mencoba, tidak akan digunakan lagi. Berapakah peluang tepat pada percobaan ke-7 ia berhasil membuka peti harta karun tersebut ?

10. (OSK 2010) Perempat final Liga Champion 2010 diikuti 8 team A, B, C, D, E, F, G dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut

Setiap team mempunyai peluang $\frac{1}{2}$ untuk melaju ke babak berikutnya. Peluang kejadian A bertemu G di final dan pada akhirnya A juara adalah ⋯⋯

11. Sebuah bilangan empat angka berbeda dibentuk dari angka-angka 3, 4, 5 dan 6. Berapakah peluang bahwa bilangan tersebut habis dibagi 11.

12. Ahmadi melempar sebuah dadu dilempar 3 kali. Ada berapa cara munculnya jumlah mata dadu sama dengan 13 ?

13. (OSK 2010) Misalkan S menyatakan himpunan semua faktor positif dari 2010^2. Sebuah bilangan diambil secara acak dari S. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah ⋯⋯

14. Terdapat dua buah kantong. Kantong pertama berisi 5 bola merah dan 3 bola putih. Kantong kedua berisi 4 bola putih dan 6 bola biru. Sebuah bola diambil dari kantong pertama lalu dimasukkan ke dalam kantong kedua. Sebuah bola diambil secara acak dari kantong kedua. Berapa peluang bola yang terambil berwarna :

a. biru
b. merah
c. putih

15. Lima buah huruf diambil dari huruf-huruf A, B, C, D, E, F, G, H, I. Berapakah peluang yang terambil itu terdiri dari 2 huruf hidup (vokal) dan 3 huruf mati (konsonan) ?

16. Jika dua buah dadu dilempar bersamaan, berapakah peluang munculnya nilai mutlak selisih dua dadu tersebut tidak lebih dari dua ?

17. Dua buah bilangan diambil dari bilangan-bilangan 0, 1, 3, 5, 6, 8, 9. Tentukan peluang bahwa selisih kedua buah bilangan tersebut adalah bilangan ganjil.

18. Terdapat persamaan $x^2 + ax + b = 0$ dengan nilai a dan b diambil dari himpunan {1, 2, 3, 4, 5}. Diketahui bahwa a dan b adalah bilangan asli berbeda. Jika a dan b dipilih secara acak maka peluang kedua akar persamaan $x^2 + ax + b = 0$ merupakan bilangan real adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅

19. Diketahui a, b, c adalah tiga bilangan berbeda yang angka-angkanya diambil dari himpunan {2005, 2006, 2007, 2008, 2009}. Peluang ab + c genap adalah ⋅⋅⋅⋅⋅

20. Tiga buah dadu dilempar sekaligus. Berapakah peluang bahwa hasil kali ketiga mata dadu menghasilkan bilangan genap dan penjumlahan ketiga mata dadu juga genap ?

21. Eka Yulita memberi tanda pada sembilan buah kartu dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dan 9. Secara acak ia mengambil 4 buah kartu dari tumpukan kartu tersebut sehingga membentuk sebuah bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapakah peluang bahwa bilangan tersebut lebih dari 8000 dan habis dibagi 5 ?

22. Triesna mengambil 2 bilangan dari himpunan bilangan {1, 2, 3, ⋅⋅⋅, n − 1, n}. Peluang bahwa kedua bilangan yang terambil merupakan 2 bilangan yang berurutan adalah 20%. Tentukan n.

23. Dua buah benteng berbeda diletakkan secara acak pada petak-petak papan catur 8 x 8. Berapakah peluang kedua benteng ini tidak saling memakan ?

24. Hansen memiliki 11 koin perak dan 1 koin emas. Furkan memiliki 12 koin perak. Secara acak 8 koin diambil dari Hansen lalu diberikan ke Furkan. Kemudian dari 20 koin yang dimiliki Furkan tersebut diambil 8 koin secara acak lalu diberikan kepada Hansen. Berdasarkan kejadian ini, berapakah peluang koin emas ada pada Hansen ?

25. Keenam mata dadu pada umumnya diberi angka 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Jika dua buah dadu dilempar maka jumlah mata dadu yang muncul adalah dari 2 sampai 12. Angka-angka pada suatu mata dadu diganti menjadi 1, 2, 2, 3, 3 dan 4. Misalkan ini adalah dadu A. Sebuah mata dadu pada dadu B juga akan diberi angka-angka sehingga jika dadu A dan B dilempar bersamaan akan menghasilkan jumlah mata dadu dari 2 sampai 12 juga serta peluang munculnya jumlah mata dadu setiap angka pada pelemparan kedua dadu tersebut juga sama dengan peluang munculnya jumlah mata dadu setiap angka jika melempar dua buah dadu yang umum. Angka-angka yang harus dituliskan pada mata dadu B sehingga hal tersebut terpenuhi adalah ⋅⋅⋅⋅⋅

26. Suatu set soal terdiri dari 2 soal pilihan jawaban Benar (B) atau Salah (S) serta 2 soal pilihan ganda dengan pilihan jawaban A, B atau C. Jika seorang menjawab ke-4 soal secara acak, maka peluang ia benar tepat dua soal adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

27. Dari bilangan-bilangan 2006, 2007, 2008, 2009 dan 2010 akan diambil 3 bilangan. Berapakah peluang jumlah ketiga bilangan tersebut habis dibagi 3 ?

28. Pada sebuah dek kartu yang terdiri dari 20 kartu, kartu pertama berisi gambar segi-4 beraturan, kartu kedua berisi gambar segi-5 beraturan, kartu ketiga berisi gambar segi-6 beraturan dan seterusnya sehingga sehingga kartu ke-20 berisi gambar segi-23 beraturan. Sebuah kartu secara acak diambil dari 20 tumpukan kartu tersebut. Misalkan sudut dalam dari segi-n beraturan pada kartu tersebut adalah x^o, maka berapakah peluang bahwa x adalah bilangan bulat ?

29. (OSN 2008 SMP/MTs) Bilangan empat angka akan dibentuk dari angka-angka pada 0, 1, 2, 3, 4, 5 dengan syarat angka-angka pada bilangan tersebut tidak berulang, dan bilangan yang terbentuk merupakan kelipatan 3. Berapakah peluang bilangan yang terbentuk mempunyai nilai kurang dari 3000?

30. Andi secara acak memilih 2 bilangan di antara {1, 2, 3, 4, 5} dan Budi secara acak memilih 1 bilangan di antara {1, 2, 3, ⋯, 10}. Peluang bahwa bilangan yang dipilih Budi lebih dari jumlah 2 bilangan yang dipilih Andi adalah ⋯⋯

31. Jika sebuah bilangan dipilih secara acak dari bilangan-bilangan yang merupakan faktor dari 10^{99} maka peluang bahwa bilangan tersebut habis dibagi 10^{88} sama dengan ⋯⋯

32. (OSP 2011) Misalkan A adalah himpunan semua pembagi positif dari 10^9. Jika dipilih dua bilangan sebarang x dan y di A (boleh sama), tentukan peluang dari kejadian x membagi y.

33. Titik P dipilih secara acak dan terletak di dalam segilima ABCDE dengan koordinat titik sudutnya, A(0, 2), B(4, 0), C(2π + 1, 0), D(2π + 1, 4) dan E(0, 4). Tentukan peluang bahwa ∠APB tumpul ?

34. ABCD adalah persegi panjang dengan AB = 2 dan BC = 1. Titik P secara acak terletak pada sisi CD. Misalkan ∠PAB = α, ∠PBA = β dan ∠APB = θ. Besarnya peluang θ adalah yang terbesar di antara α, β dan θ adalah ⋯⋯

35. (OSP 2006) Win memiliki dua koin. Ia akan melakukan prosedur berikut berulang-ulang selama ia masih memiliki koin : lempar semua koin yang dimilikinya secara bersamaan; setiap koin yang muncul dengan sisi angka akan diberikannya kepada Albert. Tentukan peluang bahwa Win akan mengulangi prosedur ini lebih dari tiga kali.

36. Tiga tusuk sate berwarna merah, empat berwarna hijau dan lima berwarna biru diletakkan dalam satu baris secara sebarangan. Tentukan peluang bahwa tidak ada tusuk biru yang berdampingan ?

37. (OSP 2011) Dua dadu memiliki angka satu sampai 6 yang dapat dilepas dari dadu. Kedua belas angka tersebut dilepaskan dari dadu dan dimasukkan ke dalam suatu kantong. Secara acak diambil satu angka dan dipasangkan ke salah satu dari kedua dadu tersebut. Setelah semua angka terpasangkan, kedua dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang munculnya angka tujuh sebagai jumlah dari angka pada bagian atas kedua dadu tersebut adalah ⋯⋯

E. Pengambilan Contoh Dengan dan Tanpa Pengembalian

Sebelum menjelaskan tentang pengambilan contoh dengan dan tanpa pengembalian, maka akan dijelaskan terlebih dulu mengenai kejadian bersyarat. Kejadian bersyarat adalah kejadian munculnya B dengan persyaratan telah munculnya kejadian A.

Rumus peluang munculnya kejadian B dengan syarat kejadian A telah muncul adalah :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$ dengan P(A) ≠ 0. .... (2.E.1)

Atau jika ingin menghitung P(A∩B)

$P(B \cap A) = p(B|A) \times p(A)$ .... (2.E.2)

Misalkan kita akan mengambil dua kartu bridge dari tumpukan 1 set kartu bridge secara berurutan satu persatu. Ada 2 cara pengambilan dua kartu tersebut. Yang pertama adalah setelah pengambilan kartu pertama maka kartu pertama tersebut dikembalikan lagi ke dalam tumpukan 1 set kartu bridge dan kemudian mengambil kartu kedua. Ini dinamakan dengan pengambilan contoh dengan pengembalian. Cara kedua adalah setelah pengambilan kartu pertama maka kartu pertama tersebut tidak dikembalikan lagi ke dalam tumpukan 1 set kartu bridge dan kemudian mengambil kartu kedua. Ini dinamakan dengan pengambilan contoh tanpa pengembalian. Pengambilan Contoh dengan dan tanpa pengembalian merupakan kejadian bersyarat.

1) Pengambilan Contoh dengan Pengembalian

Contoh 55 :
Dari sebuah tumpukan kartu bridge, diambil dua kartu satu persatu dengan pengembalian. Berapakah peluang kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu berwarna merah ?

Solusi :
Misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu pertama adalah kartu As.
B adalah kejadian terambilnya kartu kedua adalah kartu merah.
Kartu pertama yang terambil adalah kartu As maka peluangnya adalah = $p(A) = \frac{4}{52}$.
Setelah dikembalikan, jumlah kartu tetap 52 dengan kartu berwarna merah tetap 26 buah.
Maka peluang pengambilan kartu kedua adalah kartu berwarna merah setelah pengambilan kartu pertama adalah kartu As adalah = $p(B|A) = \frac{26}{52}$.
Maka peluang pengambilan pertama adalah kartu As **dan** pengambilan kedua adalah kartu berwarna merah adalah = $P(A \cap B) = p(B|A) \times p(A) = \frac{4}{52} x \frac{26}{52} = \frac{1}{26}$.

Contoh 56 :
Dalam sebuah kotak terdapat 3 bola merah dan 4 bola biru. Berapakah peluang jika diambil dua bola satu persatu dengan pengembalian dengan bola pertama berwarna merah dan bola kedua berwarna biru ?

Solusi :
Misalkan A adalah kejadian terambilnya bola pertama adalah bola merah.
B adalah kejadian terambilnya bola kedua adalah bola biru.
Bola pertama yang terambil adalah bola merah maka peluangnya adalah = $p(A) = \frac{3}{7}$.
Setelah dikembalikan, jumlah bola tetap 7 dengan bola biru tetap 4 buah.
Maka peluang pengambilan bola kedua adalah bola biru setelah pengambilan bola pertama adalah merah adalah = $p(B|A) = \frac{4}{7}$.
Maka peluang pengambilan pertama adalah bola merah **dan** pengambilan kedua adalah bola biru adalah = $P(A \cap B) = p(B|A) \times p(A) = \frac{3}{7} x \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$.

2) Pengambilan Contoh Tanpa Pengembalian

Contoh 57 :
Dari sebuah tumpukan kartu bridge, diambil dua kartu satu persatu tanpa pengembalian. Berapakah peluang kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu King ?

Solusi :
Misalkan A adalah kejadian terambilnya kartu pertama adalah kartu As.
B adalah kejadian terambilnya kartu kedua adalah kartu King.

Kartu pertama yang terambil adalah kartu As maka peluangnya adalah = p(A) = $\frac{4}{52}$.

Karena kartu tidak dikembalikan maka jumlah kartu tinggal 51 dengan kartu King tetap 4 buah jika kartu pertama yang terambil adalah kartu As.
Maka peluang pengambilan kartu kedua adalah kartu berwarna King setelah pengambilan kartu pertama adalah kartu As adalah = p(B|A) = $\frac{4}{51}$.

Maka peluang pengambilan pertama adalah kartu As **dan** pengambilan kedua adalah kartu King adalah = P(A∩B) = p(B|A) x p(A) = $\frac{4}{52} x \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$.

Contoh 58 :
Dalam sebuah kotak terdapat 3 bola merah dan 4 bola biru. Berapakah peluang jika diambil dua bola satu persatu tanpa pengembalian dengan bola pertama berwarna biru dan bola kedua berwarna juga biru ?

Solusi :
Misalkan A adalah kejadian terambilnya bola pertama adalah bola biru.
B adalah kejadian terambilnya bola kedua adalah bola biru.

Bola pertama yang terambil adalah bola biru maka peluangnya adalah = p(A) = $\frac{4}{7}$.

Karena tanpa pengembalian, jumlah bola tinggal 6 dengan bola biru tinggal 3 buah jika bola pertama yang terambil adalah bola biru.
Maka peluang pengambilan bola kedua adalah bola biru setelah pengambilan bola pertama adalah biru adalah = p(B|A) = $\frac{3}{6}$.

Maka peluang pengambilan pertama adalah bola biru **dan** pengambilan kedua adalah juga bola biru adalah = P(A∩B) = p(B|A) x p(A) = $\frac{4}{7} x \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

LATIHAN 2.E

1. Dalam sebuah kantong terdapat 6 manik kuning, 4 manik biru dan 3 manik hitam. Jika diambil 2 manik satu persatu, maka berapakah peluang manik pertama yang terambil berwarna kuning dan kedua hitam apabila :
   a. dengan pengembalian
   b. tanpa pengembalian

2. Dalam sebuah kotak terdapat 5 kelereng merah, 3 kelereng hijau dan 2 kelereng hitam. Jika diambil 3 kelereng satu persatu, maka berapakah peluang kelereng pertama yang terambil berwarna merah, kedua hijau dan ketiga merah apabila :
   a. dengan pengembalian ?
   b. tanpa pengembalian ?

3. Dalam sebuah kotak terdapat 6 bola merah dan 4 bola biru. Dari dalam kotak itu diambil dua bola satu demi satu tanpa pengembalian. Berapa peluang yang terambil itu :
   a. bola merah pada pengambilan pertama maupun kedua ?
   b. bola merah pada pengambilan pertama dan bola biru pada pengambilan kedua ?
   c. bola biru pada pengambilan pertama dan bola merah pada pengambilan kedua ?
   d. bola biru pada pengambilan pertama maupun kedua ?

   Berapakah penjumlahan a, b, c dan d ? Apa kesimpulan Anda.

4. Dari 1 set kartu bridge diambil dua buah kartu satu persatu tanpa pengembalian. Berapakah peluang kartu pertama yang terambil adalah kartu As dan kartu kedua adalah kartu hati ?

5. Dua kertu bridge diambil berurutan secara random dari satu set kartu bridge. Kartu pertama dikembalikan dan kartu diacak kembali, setelah itu kartu kedua diambil. Berapa peluang paling sedikit satu dari kedua kartu yang diambil adalah kartu As ?

F. Peluang Komplemen

Misalkan saja kejadian yang terjadi adalah hujan atau tidak hujan serta tidak ada kejadian di antara hujan atau tidak hujan. Seandainya kita tahu tahu bahwa peluang hari ini hujan adalah 60 % maka tentunya kita bisa menghitung peluang hari ini tidak hujan, yaitu 40 %.

Kejadian hujan dan kejadian tidak hujan adalah dua kejadian yang saling komplemen. Jika kejadian hujan ditulis dengan A maka kejadian tidak hujan ditulis dengan A’ atau A^c yang dibaca komplemen dari A.

Jika A dan A’ adalah dua kejadian yang saling komplemen, maka peluang A’ (ditulis p(A’)) dirumuskan dengan :

$$p(A') = 1 - p(A) \qquad \text{..............................} \qquad (2.F.1)$$

Contoh 59 :

Peluang Ahmadi untuk lulus ujian adalah 0,8. Berapakah peluang Ahmadi tidak lulus ujian ?

Solusi :

Peluang Ahmadi untuk tidak lulus ujian = 1 – 0,8 = 0,2

Contoh 60 :

Dalam sebuah kotak terdapat 4 manik merah dan 3 manik hijau. Jika diambil 3 buah manik, berapakah peluang manik yang terambilnya paling banyak 2 buah berwarna merah ?

Solusi :

Alternatif 1 :

Kemungkinan kasus-kasus ini adalah 2 manik merah dan 1 manik hijau atau 1 manik merah dan 2 manik hijau atau ketiga-tiganya manik hijau.

Banyaknya cara memilih adalah ${}_4C_2 \times {}_3C_1 + {}_4C_1 \times {}_3C_2 + {}_4C_0 \times {}_3C_3$ = 18 + 12 + 1 = 31 cara.

Tiga manik diambil dari 7 manik, banyaknya cara = ${}_7C_3$ = 35.

Peluang yang terambil adalah paling banyak 2 manik merah = $\frac{31}{35}$

Alternatif 2 :

Komplemen paling banyak 2 manik merah dalam soal ini adalah ketiga manik yang terambil semuanya berwarna merah. Banyaknya cara memilih adalah ${}_4C_3 \times {}_3C_0$ = 4 cara.

Peluang yang terambil adalah 3 manik merah = $\frac{4}{35}$.

Peluang yang terambil adalah paling banyak 2 manik merah = $1-\frac{4}{35}$ = $\frac{31}{35}$.

LATIHAN 2.F

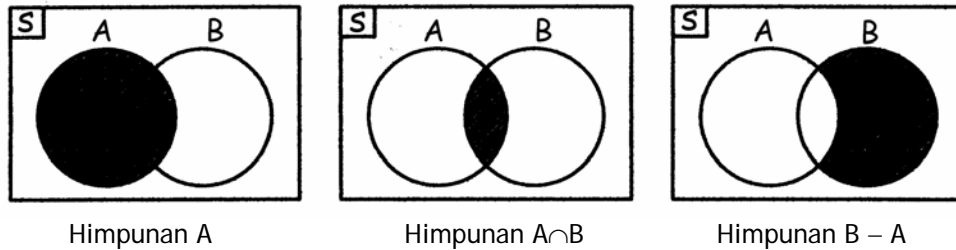
1. Banyaknya bilangan tiga angka yang mempunyai sedikitnya satu angka genap adalah ·····
2. Pada papan catur 4 x 4 diletakkan secara acak 4 buah pion identik. Berapakah peluang bahwa keempat pion tersebut tidak berada pada satu garis ?
3. Dalam sebuah kotak terdapat 7 bola hitam dan 6 bola putih. Jika diambil 5 buah bola, berapakah peluang bola yang terambilnya sedikitnya 2 buah berwarna hitam ?
4. Dalam sebuah kotak terdapat 7 bola hitam, 4 bola putih dan 3 bola merah. Jika diambil 5 buah bola, berapakah peluang bola yang terambilnya sedikitnya 2 buah berwarna hitam ?
5. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak Lala mengambil dua bola sekaligus. Berapakah peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama ?
6. Dua kartu bridge diambil berurutan secara random dari satu set kartu bridge. Kartu pertama dikembalikan dan kartu diacak kembali, setelah itu kartu kedua diambil. Berapa peluang paling sedikit satu dari kedua kartu yang diambil adalah kartu As ?
7. (OSP 2009) Ada empat pasang sepatu akan diambil empat sepatu secara acak. Peluang bahwa yang terambil ada yang berpasangan adalah ······

3. PRINSIP INKLUSI EKSKLUSI, PELUANG KEJADIAN MAJEMUK

A. Prinsip Inklusi Eksklusi

Prinsip Inklusi dan Eksklusi (PIE) adalah bentuk paling umum dari prinsip penambahan pada himpunan. Perhatikan gabungan dua himpunan pada diagram venn di bawah.

Himpunan A

Himpunan $A \cap B$

Himpunan B – A

Misalkan S adalah suatu himpunan terhingga dengan A dan B sembarang dua himpunan bagian dari S. Maka untuk mencacah banyaknya unsur di dalam $A \cup B$, kita dapat melakukannya dengan mencacah banyaknya unsur himpunan A dan himpunan B – A dan kemudian menjumlahkannya. Karena $|B - A| = |B| - |A \cap B|$ maka :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad \text{..............................} \qquad (3.A.1)$$

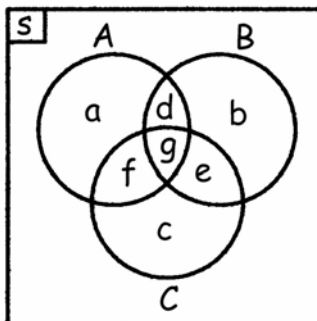
Catatan : Notasi $|A \cup B|$ dalam buku lain kadang-kadang ditulis dengan $n(A \cup B)$.
Dengan kata lain, ketika mencacah unsur-unsur A dan B sendiri-sendiri, unsur-unsur irisan A dan B tercacah dua kali sehingga untuk mengatasi pencacahan ganda ini, kita harus mengurangkan hasil pencacahan dari $|A| + |B|$ dengan pada $A \cap B$ sekali.
Selain rumus pada persamaan 3.A.1, pada gabungan dua himpunan berlaku persamaan :

$$|(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B| \qquad \text{..............................} \qquad (3.A.2)$$

dengan tanda " ' " menyatakan komplemen.
Sesuai hukum de Morgan berlaku :

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad \text{..............................} \qquad (3.A.3)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \text{..............................} \qquad (3.A.4)$$

Perhatikan gabungan tiga himpunan berikut :

Ketika mencacah unsur-unsur A (a + d + f + g), B (b + d + e + g) dan C (c + e + f + g) sendiri-sendiri, unsur-unsur irisan tepat A dan B (d), irisan tepat A dan C (f) serta irisan tepat B dan C (e) tercacah dua kali sedangkan irisan A, B dan C (g) tercacah tiga kali. Maka untuk mengatasi pencacahan ganda ini, kita harus mengurangkan hasil pencacahan $|A| + |B| + |C|$ masing-masing sekali dengan $A \cap B$,

$A \cap C$ dan $B \cap C$. Namun ketika kita menghitung $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$, irisan A, B dan C ($A \cap B \cap C$) belum tercacah sama sekali. Untuk mengatasi hal tersebut kita masih harus menambahkan $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ dengan $|A \cap B \cap C|$ sekali. Maka didapat rumus :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad \cdots\cdots \quad (3.A.5)$$

$$|(A \cup B \cup C)'| = |S| - |A \cup B \cup C| \quad \cdots\cdots \quad (3.A.6)$$

Jika dikembangkan untuk gabungan 4 himpunan akan didapatkan :

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \quad \cdots\cdots \quad (3.A.7)$$

$$|(A \cup B \cup C \cup D)'| = |S| - |A \cup B \cup C \cup D| \quad \cdots\cdots \quad (3.A.8)$$

Demikian seterusnya.

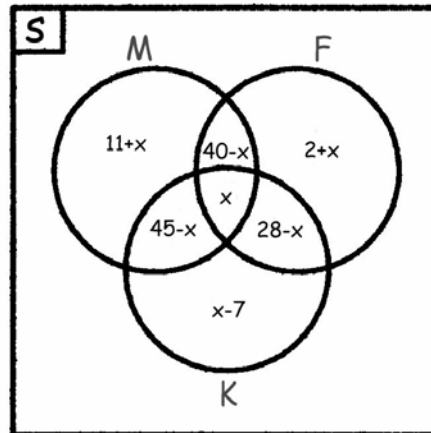
Contoh 61 :
Dari 65 siswa yang disurvei didapatkan data bahwa ada 20 siswa yang menyukai Fisika dan 35 menyukai Matematika. Jika terdapat 25 siswa yang tidak menyukai Matematika maupun Fisika maka ada berapa siswa yang menyukai Matematika dan Fisika ?

Solusi :
Misalkan F adalah himpunan siswa yang menyukai Fisika dan M adalah himpunan siswa yang menyukai Matematika.
$|F| = 20$; $|M| = 35$; $|S| = 65$; $|(F \cup M)'| = 25$
$|S| = |F \cup M| + |(F \cup M)'|$ sehingga $|F \cup M| = 40$

$|F \cup M| = |F| + |M| - |F \cap M|$
$40 = 20 + 35 - |F \cap M|$ sehingga $|F \cap M| = 15$
Banyaknya siswa yang menyukai Matematika dan Fisika ada 15 orang.

Contoh 62 :
Sebuah survei dilakukan terhadap sekumpulan siswa. Dari survei tersebut didapat bahwa 133 orang menyukai sedikitnya satu dari 3 pelajaran Fisika, Matematika atau Kimia. Sembilan puluh enam di antaranya menyukai Matematika, 70 menyukai Fisika dan 66 menyukai Kimia. Dari 96 siswa yang menyukai Matematika, 40 di antarnya menyukai Fisika dan 45 di antaranya menyukai Kimia. Banyaknya siswa yang menyukai Fisika dan Kimia ada sebanyak 28 orang. Ada berapa banyak siswa yang menyukai ketiga mata pelajaran tersebut ?

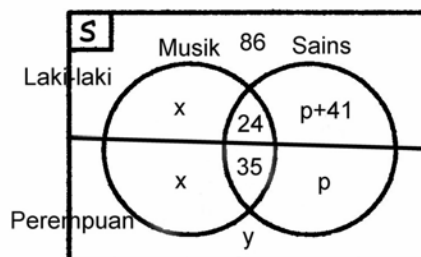
Solusi :
Misalkan banyaknya siswa yang menyukai ketiga pelajaran = $|F \cap M \cap K| = x$
Dari data didapat yang menyukai Matematika dan Fisika ada sebanyak 40 maka banyaknya siswa yang menyukai Matematika dan Fisika tetapi tidak menyukai Kimia = $40 - x$
Dari data didapat yang menyukai Matematika dan Kimia ada sebanyak 45 maka banyaknya siswa yang menyukai Matematika dan Kimia tetapi tidak menyukai Fisika = $45 - x$.
Dari data didapat yang menyukai Fisika dan Kimia ada sebanyak 28 maka banyaknya siswa yang menyukai Fisika dan Kimia tetapi tidak menyukai Matematika = $28 - x$.
Banyaknya siswa yang hanya menyukai Matematika = $96 - (40 - x) - x - (45 - x) = 11 + x$
Banyaknya siswa yang hanya menyukai Fisika = $70 - (40 - x) - x - (28 - x) = 2 + x$
Banyaknya siswa yang hanya menyukai Kimia = $66 - (28 - x) - x - (45 - x) = x - 7$

Jika digambarkan dalam diagram venn maka :

$96 + (2 + x) + (28 - x) + (x - 7) = 133$
$x = 14$
Maka banyaknya siswa yang menyukai ketiga pelajaran ada sebanyak 14 orang.

Contoh 63 :
Sebuah sekolah memiliki 760 siswa. Ada 71 siswa yang mengikuti Klub Musik dan 110 siswa yang tidak mengikuti Klub Sains. Pada Klub Sains, jumlah siswa laki-laki 30 lebih banyak daripada siswa perempuan. Lima puluh sembilan siswa dengan 35 di antaranya perempuan mengikuti Klub Musik maupun Klub Sains. Diketahui juga bahwa 86 siswa laki-laki tidak mengikuti Klub Sains maupun Klub Musik. Setengah dari siswa yang mengikuti Klub Musik tetapi tidak mengikuti Klub Sains adalah laki-laki. Hitunglah :

a. Banyaknya siswa laki-laki dan siswa perempuan di sekolah tersebut ?
b. Banyaknya siswa perempuan yang tidak mengikuti Klub Musik maupun Klub Sains.

Solusi :
Misalkan banyaknya siswa laki-laki yang mengikuti Klub Musik tetapi tidak mengikuti Klub Sains = x. Maka banyaknya siswa perempuan siswa laki-laki yang mengikuti Klub Musik tetapi tidak mengikuti Klub Sains juga = x.
$|S| = 760$; $|\text{Musik}| = 71$; $|(\text{Sains})'| = 110$ sehingga $|\text{Sains}| = 760 - 110 = 650$
Karena ada 59 siswa yang mengikuti Klub Sains maupun Klub Musik dengan 35 di antaranya perempuan maka ada 24 siswa laki-laki mengikuti Klub Sains maupun Klub Musik.
Misalkan banyaknya siswa perempuan yang mengikuti Klub Sains tetapi tidak mengikuti Klub Musik = p. Karena pada Klub Sains, jumlah siswa laki-laki 30 lebih banyak daripada siswa perempuan maka banyaknya siswa laki-laki yang mengikuti Klub Sains tetapi tidak mengikuti Klub Musik = p + 41.

Perhatikan diagram venn berikut.

Pada Klub Sains berlaku :
$24 + 35 + (p + 41) + (p) = 650$
$p = 275$

Pada Klub Musik berlaku :
$x + x + 24 + 35 = 71$
$x = 6$
Secara keseluruhan :
$86 + 650 + 6 + 6 + y = 760$
$y = 12$

a. Banyaknya siswa laki-laki = 86 + 6 + 24 + (275 + 41) = 432
   Banyaknya siswa perempuan = 12 + 6 + 35 + (275) = 328
b. Banyaknya siswa perempuan yang tidak mengikuti Klub Musik maupun Klub Sains = y = 12

Contoh 64 :
Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung kedalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

Solusi :
(a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi
(b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama

Karena ada 4 komisi maka banyaknya pasangan komisi yang bisa dibuat adalah ${}_4C_2 = 6$.
Karena banyaknya pasangan komisi ada 6 maka banyaknya anggota minimal adalah 6 sebab jika kurang dari 6 maka akan ada seorang anggota yang tergabung dalam lebih dari 2 komisi.
Jika terdapat lebih dari 6 anggota maka akan ada seorang anggota yang masuk dalam sebuah komisi tetapi tidak masuk ke dalam tiga komisi lain. Hal ini bertentangan dengan (a) bahwa seorang anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi. Akibatnya banyaknya anggota ada 6 orang.

Contoh pembagian keenam anggota ke dalam empat komisi yang memenuhi (a) dan (b) adalah :
Misalkan komisi tersebut adalah A, B, C dan D dengan a_i menyatakan anggota ke-i dengan $1 \le i \le 6$.

Komisi A	Komisi B	Komisi C	Komisi D
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_4	a_4	a_5
a_3	a_5	a_6	a_6

Coba kerjakan dengan Prinsip Inklusi Eksklusi.

Contoh 65 :
Suatu *kata biner* yang panjangnya n adalah suatu barisan/sekuens angka-angka 0 atau 1 yang panjangnya n. Berapa banyak kata biner dengan panjang 10 yang diawali dengan tiga angka 0 atau diakhiri dengan dua angka 1 ?

Solusi :
Banyaknya kata biner dengan panjang 10 yang diawali dengan tiga angka 0 adalah sama dengan memilih angka 0 atau 1 pada 7 angka terakhir sebab 3 angka pertama tidak dapat dipilih. Pilihannya masing-masing angka hanya 0 atau 1. Banyaknya cara = $|A| = 2^7$.
Banyaknya kata biner dengan panjang 10 yang diakhiri dengan dua angka 1 adalah sama dengan memilih angka 0 atau 1 pada 8 angka pertama sebab 2 angka terakhir tidak dapat dipilih. Pilihannya masing-masing angka hanya 0 atau 1. Banyaknya cara = $|B| = 2^8$.
Tetapi ada kejadian kata biner tersebut diawali dengan tiga angka 0 **dan** diakhiri dengan dua angka 1. Banyaknya kata ini = $|A \cap B| = 2^5$.
Banyaknya kata biner yang dapat disusun = $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Maka banyaknya kata biner yang dapat disusun = $2^7 + 2^8 - 2^5 = 352$

Contoh 66 :
Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 2 dan tidak habis dibagi 5 ?

Solusi :
Misalkan A' adalah himpunan bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 2 dan B' adalah himpunan bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 5 serta S adalah himpunan bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000).
Maka A menyatakan himpunan bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang habis dibagi 2 dan B menyatakan himpunan bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang habis dibagi 5.
$|S| = 1000$
Persoalan yang ditanyakan adalah $A' \cap B'$. Dengan hukum de Morgan maka $(A' \cap B') = (A \cup B)'$
$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500$ dan $|B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$
dengan tanda $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan α.
Maka $A \cap B$ akan menyatakan himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 2 dan 5 atau habis dibagi 10.
$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{10} \right\rfloor = 100$
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 600$
$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)| = 400$
Maka banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 2 dan tidak habis dibagi 5 = 400 buah.

LATIHAN 3.A

1. Pada suatu klub Musik, 14 orang bermain piano atau gitar, 8 orang adalah pemain piano dan 5 orang memainkan kedua alat tersebut. Ada berapa orang yang memainkan gitar ?

2. Dari 100 orang siswa terdapat 30 siswa yang hanya menyukai sepakbola saja. yang menyukai bola volly ada 50 siswa. Ada berapa siswa yang tidak menyukai sepak bola maupun bola volly ?

3. Dari 240 siswa kelas 3 suatu SMA, terdapat 50 orang menyukai sepakbola, 60 orang menyukai bulutangkis dan 55 menyukai catur. Tiga puluh siswa menyukai sepakbola dan bulutangkis sementara 10 siswa menyukai bulutangkis dan catur tetapi tidak menyukai sepakbola. Ada 20 siswa yang menyukai ketiga hobi tersebut. Jika ada 150 siswa yang tidak menyukai satu pun di antara ketiga hobi tersebut, maka ada berapa siswa yang menyukai sepakbola dan catur tetapi tidak menyukai bulutangkis ?

4. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 2 dan tidak habis dibagi 7 ?

5. Ada berapa banyak bilangan bulat antara 1 dan 1000 (termasuk 1 dan 1000) yang tidak habis dibagi 2, 3 dan 7 ?

6. Tentukan banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 3, 7 dan 11 dan terletak antara 79 dan 2120 (tidak termasuk 79 dan 2120).

7. Di dalam suatu kelas beberapa orang mempelajari Bahasa Inggris sedangkan sisanya mempelajari Bahasa Jerman tetapi tidak ada siswa yang mempelajari keduanya. Jumlah siswa perempuan yang mempelajari Bahasa Inggris dan siswa laki-laki yang mempelajari Bahasa Jerman adalah 16 orang. Ada 11 siswa yang mempelajari Bahasa Inggris dan ada 10 siswa perempuan di kelas. Selain siswa perempuan yang mempelajari Bahasa Inggris, ada 16 orang siswa di kelas. Berapa banyakkah total siswa di kelas ?

B. Peluang Kejadian Majemuk

Jika persamaan-persamaan 3.A.1, 3.A.2, 3.A.5, 3.A.6 kita bagi dengan $|S|$ dan dengan memperhatikan pengertian peluang pada bagian 2.D.2.2 akan didapat rumus-rumus peluang sebagai berikut :

Untuk gabungan 2 himpunan :

$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ .... (3.B.1)

$p(A\cup B)' = 1 - p(A\cup B)$ .... (3.B.2)

Untuk gabungan 3 himpunan :

$p(A\cup B\cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A\cap B) - p(A\cap C) - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$ .... (3.B.3)

$p(A\cup B)' = 1 - p(A\cup B)$ .... (3.B.4)

Khusus untuk gabungan dua himpunan dikenal adanya dua himpunan saling lepas dan dua himpunan saling bebas.

Dua himpunan dikatakan saling lepas jika dua himpunan tersebut tidak memiliki irisan atau dengan kata lain $(A\cap B) = 0$ yang berakibat $p(A\cap B) = 0$. Maka untuk dua himpunan yang saling lepas berlaku :

$p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ .... (3.B.5)

Dua himpunan dikatakan saling bebas jika dua himpunan tersebut tidak saling mempengaruhi. Misalkan A dan B adalah dua himpunan saling bebas dan berlaku :

$p(A\cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .... (3.B.6)

Pengambilan contoh dengan pengembalian merupakan contoh kejadian saling bebas.

Contoh 67 :

Sebuah dadu dilempar sekali. Berapakah peluang mata dadu yang muncul adalah bilangan prima atau bilangan genap ?

Solusi :

Misalkan A adalah munculnya mata dadu prima dan B adalah munculnya mata dadu bilangan prima. Karena bilangan prima yang mungkin ada 3 yaitu 2, 3 dan 5 maka $p(A) = \frac{1}{2}$ dan $p(B) = \frac{1}{2}$. Irisan himpunan A dan B adalah {2}, maka $p(A\cap B) = \frac{1}{6}$.

$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

Maka peluang mata dadu yang muncul adalah bilangan prima atau bilangan genap = $\frac{5}{6}$.

Contoh 68 :

Peluang Ahmadi lulus ujian 95% dan peluang Putu lulus ujian 90 %. Jika dapat dianggap bahwa kejadian Ahmadi lulus dan Putu lulus merupakan dua kejadian yang saling bebas, berapakah peluang:

a. Ahmadi dan Putu lulus ujian
b. Ahmadi atau Putu lulus ujian
c. Ahmadi lulus ujian dan Putu tidak lulus

Solusi :
Misalkan A adalah kejadian Ahmadi lulus ujian dan B adalah kejadian Putu lulus ujian.
p(A) = 0,95 dan p(B) = 0,90

a. $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855$
   Peluang Ahmadi dan Putu lulus ujian = 0,855
b. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}95 + 0{,}90 - 0{,}855 = 0{,}995$
   Peluang Ahmadi atau Putu lulus ujian = 0,995
c. $p(A \cap B') = p(A) \cdot p(B') = 0{,}95 \cdot 0{,}10 = 0{,}095$
   Peluang Ahmadi lulus ujian dan Putu tidak lulus = 0,095

LATIHAN 3.B

1. Dari hasil penelitian pada suatu wilayah didapat : 20% penduduk memiliki TV, 40% memiliki radio serta 15% memiliki TV dan radio. Berapakah peluang seorang penduduk di wilayah tersebut yang dipilih secara acak untuk memiliki TV atau radio ?

2. Dari 200 orang siswa suatu sekolah yang disurvei diketahui 100 orang gemar Matematika, 60 orang gemar Biologi dan 90 orang gemar Fisika, 30 orang gemar Matematika dan Biologi, 25 orang gemar Matematika dan Fisika, 20 orang gemar Biologi dan Fisika sedangkan 10 orang lagi tidak gemar ketiga pelajaran tersebut. Jika satu orang diambil dari 200 orang tersebut secara acak, maka berapakah peluang yang terambil menyukai paling sedikit 2 dari 3 pelajaran tersebut ?

3. Kejadian A dan B adalah kejadian saling bebas tetapi tidak saling lepas. Jika $p(A) = \frac{1}{3}$ dan $p(A \cup B) = \frac{3}{5}$, maka tentukan p(B).

4. Dua buah dadu bersisi enam dilemparkan serentak satu kali. Berapakah peluang munculnya jumlah mata dadu sama dengan 7 atau 10 ?

5. Dua buah dadu dilempar bersamaan satu kali. Berapakah peluang munculnya jumlah mata dadu genap atau bilangan prima ?

6. (OSK 2011 Tipe 3) Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. Sisi dadu pertama diberi angka 1, 2, 2, 3, 3, dan 4. Sisi dadu kedua diberi angka 1, 3, 4, 5, 6, dan 8. Probabilitas agar jumlah kedua sisi atas sama dengan 5, 7, atau 9 adalah ⋅⋅⋅⋅⋅⋅⋅

7. Sebuah kartu diambil secara acak dari 1 set kartu bridge. Berapakah peluang bahwa yang terambil itu adalah kartu berwarna hitam atau kartu King ?

8. Peluang Barcelona menang atas Albacete adalah 85 % sedangkan peluang Real Madrid menang atas Albacete adalah 80 %. Berapakah peluang :
   a. Barcelona atau Real Madrid menang atas Albacete
   b. Barcelona dan Real Madrid keduanya menang atas Albacete
   c. Barcelona menang atas Albacete dan Real Madrid tidak menang atas Albacete
   d. Barcelona tidak menang atas Albacete dan Real Madrid menang atas Albacete
   e. Barcelona dan Real Madrid keduanya tidak menang atas Albacete

   Berapakah penjumlahan hasil b, c, d dan e ?

4. PIGEON HOLE PRINCIPLE (PRINSIP LUBANG MERPATI)

Pigen Hole Principle (Prinsip Lubang Merpati) mengatakan bahwa jika **lebih dari n** benda dimasukkan ke dalam n kotak, maka sedikitnya ada satu kotak yang berisi lebih dari satu benda. Secara umum bahwa jika ada lebih dari pn benda dimasukkan ke dalam n kotak maka sedikitnya ada satu kotak berisi lebih dari p benda.

Bentuk Lain : Jika n **bilangan bulat** m_1, m_2, m_3, ···, m_n memiliki rata-rata $\frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{n} > r-1$, maka sedikitnya satu di antara bilangan-bilangan bulat tersebut lebih besar atau sama dengan r.

Contoh 69 :
Jika ada 101 surat yang akan dimasukkan ke dalam 50 kotak pos, buktikan bahwa ada sedikitnya satu kotak pos berisi sekurang-kurangnya 3 surat.

Solusi :
Jika seluruh kotak pos maksimal hanya berisi 2 surat, maka jumlah maksimal surat yang dapat masuk kotak pos adalah 100. Tetapi jumlah surat yang ada yaitu 101. Maka dapat dipastikan ada sedikitnya satu kotak pos berisi sekurang-kurangnya 3 surat.

Contoh 70 :
Pada sebuah pesta setiap orang yang hadir diharuskan membawa permen. Jika pada pesta tersebut jumlah orang yang hadir ada 10 sedangkan jumlah permen yang ada sebanyak 50 buah, buktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 orang yang membawa permen dalam jumlah yang sama.

Solusi :
Andaikan bahwa seluruh orang membawa permen dalam jumlah yang berbeda maka sedikitnya jumlah permen yang ada sebanyak $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 > 50$ (tidak memenuhi). Kontradiksi.
Maka dapat dibuktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 orang yang membawa permen dalam jumlah yang sama.

Contoh 71 :
Jika terdapat $n^2 + 1$ titik yang terletak di dalam sebuah persegi dengan panjang sisi n, buktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 titik yang memiliki jarak tidak lebih dari $\sqrt{2}$ satuan.

Solusi :
Persegi dengan ukuran n x n dapat dibagi menjadi n^2 buah persegi berukuran 1 x 1.
Pada persegi dengan ukuran 1 x 1, jarak terjauh 2 titik adalah jika keduanya terletak pada titik sudut berlawanan yaitu sejauh $\sqrt{2}$ satuan.
Karena ada $n^2 + 1$ titik dengan ada n^2 persegi maka sesuai *Pigeon Hole Principle*, akan terdapat sedikitnya 2 titik yang terletak pada satu persegi dengan ukuran 1 x 1 yang sama.
Maka dapat dibuktikan ada sekurang-kurangnya 2 titik yang memiliki jarak tidak lebih dari $\sqrt{2}$ satuan.

Contoh 72 :
Jika terdapat $n^2 + 1$ titik yang terletak di dalam sebuah segitiga sama sisi dengan panjang sisi n, buktikan bahwa ada sedikitnya 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling jauh 1.

Solusi :
Bagi segitiga tersebut menjadi n^2 buah segitiga sama sisi yang masing-masing panjang sisinya 1 satuan.
Pada segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 satuan, jarak terjauh 2 titik adalah jika keduanya terletak pada titik sudut segitiga yaitu sejauh 1 satuan.

Karena ada $n^2 + 1$ titik dengan ada n^2 segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 satuan maka sesuai *Pigeon Hole Principle* akan terdapat sedikitnya 2 titik yang terletak pada satu segitiga dengan panjang sisi 1 satuan yang sama.
Maka dapat dibuktikan bahwa ada sedikitnya 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling jauh 1

Contoh 73 :
Buktikan bahwa di antara 7 bilangan bulat, pasti ada sekurang-kurangnya sepasang bilangan yang selisihnya habis dibagi 6.

Solusi :
Kemungkian sisa jika suatu bilangan bulat dibagi 6 adalah 0, 1, 2, 3, 4, atau 5. Karena ada 6 kemungkinan dan ada 7 bilangan bulat maka sesuai Pigeon Hole Principle, sedikitnya dua bilangan akan memiliki sisa yang sama jika dibagi 6. Misalkan bilangan itu adalah n_1 dan n_2 dengan sisa jika dibagi 6 adalah r. Maka kita dapat membuat $n_1 = 6k_1 + r$ dan $n_2 = 6k_2 + r$ dengan k_1 dan k_2 bilangan bulat.
$n_1 - n_2 = 6(k_1 + k_2)$ yang merupakan bilangan yang habis dibagi 6 (terbukti)

Contoh 74 :
Buktikan bahwa di antara 5 bilangan bulat pasti ada 3 di antaranya memiliki jumlah habis dibagi 3.

Solusi :
Kemungkian sisa jika suatu bilangan bulat dibagi 3 adalah 0, 1 atau 2. Misalkan terdapat tiga bilangan yang memiliki sisa yang sama jika dibagi 3. Misalkan juga sisanya adalah r. Dapat diandaikan bilangan tersebut adalah $n_1 = 3k_1 + r$, $n_2 = 3k_2 + r$ dan $n_3 = 3k_3 + r$ dengan k_1, k_2 dan k_3 bilangan bulat. Jumlah ketiga bilangan ini akan habis dibagi 3 (terbukti).
Andaikan tidak terdapat 3 bilangan yang memiliki sisa yang sama jika dibagi 3. Karena kemungkinan sisa bilangan jika dibagi 3 ada 3 kemungkinan sedangkan terdapat 5 bilangan, sesuai *Pigeon Hole Principle*, akan ada 3 di antaranya yang satu bersisa 0 jika dibagi 3, salah satunya bersisa 1 jika dibagi 3 dan satunya lagi bersisa 2 jika dibagi 3. Misalkan ke-3 bilangan adalah $n_1 = 3k_1$, $n_2 = 3k_2 + 1$ dan $n_3 = 3k_3 + 2$.
$n_1 + n_2 + n_3 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + 2)$ yang merupakan bilangan yang habis dibagi 3.

Contoh 75 :
Titik letis pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat.
Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang.
Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

Solusi :
Misal x_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu X dan Misal y_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu Y.

Jika x_{ij} dan y_{ij} keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik P_i dan P_j akan terletak pada ruas garis P_iP_j, yaitu pada pertengahan ruas garis P_iP_j yang akan berjarak $\frac{1}{2}x_{ij}$ pada arah sumbu X dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ pada arah sumbu Y terhadap titik P_i maupun P_j dengan $\frac{1}{2}x_{ij}$ dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ adalah juga bilangan bulat.

Sifat penjumlahan berikut juga akan membantu menjelaskan :
Bilangan Genap – Bilangan Genap = Bilangan Genap
Bilangan Ganjil – Bilangan Ganjil = Bilangan Genap.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.
Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

Contoh 76 :
Tunjukkan bahwa di antara tujuh bilangan bulat positif berbeda yang tidak lebih dari 126, kita selalu dapat menemukan dua di antaranya, katakanlah x dan y dengan y > x sedemikian sehingga $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Solusi :
Karena x dan y berbeda maka $\frac{y}{x} > 1$.
Alternatif 1 :

- Jika terdapat salah satu bilangan tersebut adalah 1
  Maka agar tidak memenuhi syarat maka bilangan terkecil berikutnya adalah 3. Maka agar hal ini juga tidak memenuhi syarat maka 4 bilangan terkecil berikutnya adalah 7, 15, 31, 63. Tetapi bilangan maksimal adalah 126 yang mengakibatkan 126 : 63 = 2 (memenuhi syarat pada soal)
- Jika 1 tidak termasuk ke dalam 7 bilangan tersebut
  Buat batasan bilangan menjadi enam bagian : $2^1 \leq a_i \leq 2^2$; $2^2 \leq a_i \leq 2^3$; $2^3 \leq a_i \leq 2^4$; $2^4 \leq a_i \leq 2^5$; $2^5 \leq a_i \leq 2^6$; $2^6 \leq a_i \leq 2^7$.
  Karena ada 7 bilangan dan 6 daerah bagian, maka sesuai *Pigeon Hole Principle* maka akan ada 2 bilangan berada pada satu daerah yang sama. Pada masing-masing daerah nilai terkecil adalah 2^k dan tertingginya adalah 2^{k+1} yang menyebabkan rasio bilangan terbesar dan terkecil adalah 2.
  Maka akan ada dua bilangan katakanlah x dan y dengan y > x yang berada pada satu daerah sedemikian sehingga $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Alternatif 2 :
Bagi 126 bilangan bulat positif tersebut ke dalam 6 himpunan : {1,2}, {3,4,5,6}, {7,8,⋯,14}, {15,16,⋯,30}, {31,32,⋯,62}, {63,64,⋯,126}.
Karena ada 7 bilangan dan 6 himpunan maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sedikitnya dua bilangan berada pada satu himpunan yang sama. Misalkan dua bilangan x dan y berada pada satu himpunan yang sama tersebut. Maka berlaku $1 < \frac{y}{x} \leq 2$ (terbukti)

Contoh 77 :
Seorang pemain catur memiliki waktu 11 minggu untuk menyiapkan diri mengikuti sebuah turnamen. Ia memutuskan untuk berlatih sedikitnya satu permainan setiap hari, namun tidak lebih dari 12 permainan selama seminggu. Perlihatkan bahwa ada beberapa hari berturut-turut yang selama itu pecatur tersebut berlatih tepat 21 permainan.

Solusi :
Misalkan a_r menyatakan banyaknya permainan catur dalam r hari pertama dengan $1 \leq r \leq 77$. Berdasarkan soal maka kita akan membuktikan bahwa terdapat $a_j - a_i = 21$.
Jelas bahwa $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{77}$.
Karena dalam 1 minggu grandmaster memainkan paling banyak 12 permainan maka $a_{77} \leq 12 \cdot 11 = 132$.
$a_{77} + 21 \leq 153$

Perhatikan 154 bilangan a_1, a_2, a_3, ⋯, a_{77}, $a_1 + 21$, $a_2 + 21$, $a_3 + 21$, ⋯, $a_{77} + 21$ yang semuanya terletak antara 1 dan 153.
Karena banyaknya bilangan 154 sedangkan kemungkinan nilai bilangan hanya 153 maka berdasarkan *Pigeon Hole Principle* maka akan terdapat dua bilangan yang sama. Karena a_1, a_2, ⋯, a_{77} semuanya berbeda maka akan terdapat a_j dan $a_i + 21$ yang sama.
$a_j = a_i + 21$ sehingga $a_j - a_i = 21$
Maka akan terdapat banyaknya total permainan hari ke-(i +1), (i + 2), ⋯, j tepat sama dengan 21.

LATIHAN 4

1. (OSP 2010) Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah ⋯

2. (OSP 2006) Misalkan m bilangan asli yang memenuhi $1003 < m < 2006$. Diberikan himpunan bilangan asli S = {1, 2, 3, ⋯, m}, berapa banyak anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 ?

3. (OSK 2011 Tipe 1) Di lemari hanya ada 2 macam kaos kaki yaitu kaos kaki berwarna hitam dan putih. Ali, Budi dan Candra berangkat di malam hari saat mati lampu dan mereka mengambil kaos kaki secara acak di dalam lemari dalam kegelapan. Berapa kaos kaki minimal harus mereka ambil untuk memastikan bahwa akan ada tiga pasang kaos kaki yang bisa mereka pakai ? (Sepasang kaos kaki harus memiliki warna yang sama).

4. Tandai satu buah kartu dengan angka 1, dua buah kartu dengan angka 2, tiga buah kartu dengan angka satu hingga lima puluh buah kartu dengan angka 50. Semua kartu tersebut dimasukkan ke dalam kotak. Berapa buah kartu minimal yang harus diambil agar dapat dipastikan terdapat sekurang-kurangnya 10 buah kartu dengan tanda angka yang sama ?

5. Diambil n buah bilangan dari himpunan 2008 bilangan {1, 2, 3, …, 2008}. Tentukan nilai n minimal sehingga pasti akan didapat dua bilangan asli berbeda di antaranya yang memenuhi penjumlahan kedua bilangan tersebut habis dibagi 8.

6. Dua buah kotak berisi bola. Jumlah total bola di kedua kotak tersebut adalah 65. Ada 4 buah warna bola : merah, putih, hitam dan hijau. Selain itu, jika kita mengambil 5 buah bola yang berwarna sama maka sekurang-kurangnya dua di antaranya memiliki ukuran yang sama. Buktikan bahwa salah satu kotak akan berisi sekurang-kurangnya tiga buah bola dengan warna dan ukuran yang sama.

7. Jika diketahui m buah bilangan bulat a_1, a_2, a_3, ⋯, a_m, tunjukkan bahwa ada bilangan bulat k dan s dengan $0 \le k < s \le m$ sedemikian sehingga $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_s$ habis dibagi m.

8. Di antara bilangan-bilangan 1, 2, ⋯, 200, jika 101 bilangan diambil, maka tunjukkan bahwa ada dua bilangan di antara yang terambil sedemikian sehingga yang satu habis dibagi yang lain.

9. Buktikan bahwa jika 100 bilangan diambil dari himpunan 1, 2, 3, ⋯, 200 sedemikian sehingga sedikitnya satu diantaranya lebih kecil dari 15, maka ada dua di antara yang terpilih sehingga yang satu habis dibagi yang lain.

10. Misalkan bilangan-bilangan 1 sampai 20 ditempatkan dalam urutan bagaimana pun pada sebuah lingkaran. Tunjukkan bahwa :
    a. ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya sedikitnya 32
    b. ada empat bilangan berdekatan yang jumlahnya sedikitnya 42

11. *Titik letis* pada ruang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa tripel bilangan bulat (Contoh : (3,4,5); (3,−4,6)).
    Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 adalah sembilan titik letis berbeda pada ruang.
    Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

12. Buktikan bahwa jika dalam sebuah grup 6 orang, setiap 2 orang hanya dapat selalu bersahabat atau selalu bermusuhan, maka ada sedikitnya 3 orang yang saling bersahabat atau saling bermusuhan satu sama lain.

13. Di dalam suatu pesta terdapat n orang dan mereka saling bersalaman. Jika di antara 2 orang tidak ada yang bersalaman lebih dari 1 kali, buktikan bahwa ada sedikitnya 2 orang bersalamaan dalam jumlah yang sama.

14. Diberikan 7 bilangan real. Buktikan bahwa kita dapat memilih dua di antaranya katakan a dan b sehingga $0 \le \frac{a-b}{1+ab} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$. (Petunjuk : Rumus yang dapat digunakan adalah $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$)

15. Terdapat 115 bola yang dijajarkan pada satu garis lurus dan terdapat 60 bola merah di antaranya. Masing-masing bola diberi nomor berbeda sesuai dengan urutannya yaitu nomor 1 sampai 115. Tunjukkan bahwa sedikitnya ada 2 bola merah yang terpisah 4 bola (Misalnya bola merah dengan nomor 5 dan 9 serta nomor 36 dan 40 memenuhi syarat ini).

16. Buktikan bahwa jika terdapat 19 titik dalam bidang XY yang memiliki koordinat berupa pasangan bilangan bulat dengan tidak ada tiga titik yang terletak dalam satu garis lurus, maka dapat dipastikan ada tiga di antaranya memiliki titik berat yang juga merupakan pasangan bilangan bulat.

17. (ME V6N1) Dua puluh delapan bilangan bulat diambil dari himpunan H = {104, 105, 106, 107, ⋯, 208}. Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan yang keduanya mempunyai faktor persekutuan prima.

KUNCI JAWABAN LATIHAN

BAB I ALJABAR

LATIHAN 1

1. 3
2. 2
3. 104
4. –136
5. $2\sqrt{10}$
6. 7
7. {–1, 1, 2}
8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ or $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$
9. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ or $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
10. 4
11. a=b=c=$\sqrt[3]{2}$ –1 d = $5\sqrt[3]{2}$ – 1
12. 2
13. $\frac{-1+\sqrt{161}}{40}$ dan $\frac{-1-\sqrt{161}}{40}$
14. 373
15. 0 atau 144
16. x = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
17. 20
18. Terbukti
19. 31

LATIHAN 2

1. 17
2. –25
3. 21
4. 100
5. 40300
6. 912
7. 17
8. 101
9. 93
10. 0
11. 10
12. $\frac{27}{32}$
13. 2
14. 0 < a < 4
15. $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{512}$
16. $-\frac{8}{3}$
17. 75
18. $\frac{1}{24}n^4 + \frac{5}{12}n^3 + \frac{35}{24}n^2 + \frac{25}{12}n$
19. 819
20. 4665
21. 129
22. 2025
23. 986
24. 0 atau 5
25. $\frac{19}{4}$
26. 270
27. 2419
28. 2949
29. $\frac{997501}{3990006}$
30. $\frac{1002}{2003}$
31. 9
32. $\frac{4023}{2} + \frac{1}{2014}$
33. (28,811)
34. 898
35. 618
36. Terbukti
37. 1999 + $\frac{1999}{2000}$
38. Terbukti

LATIHAN 3

1. $-4x + 6$
2. $3x^2 + 3$
3. $x = 4$
4. $f(x) = \frac{x+1}{x}$
5. $3x - 23$
6. $490x^2 + 7$
7. –10
8. $\frac{2x-1}{2x}$
9. $\frac{1}{x-5}$
10. 101
11. $\frac{9}{2}$
12. 6
13. 2005
14. 7
15. 26
16. $\frac{1}{3}$
17. 169

LATIHAN 4

1. $2x + 20$
2. $4x + 2$
3. –12
4. –2
5. 3
6. $5x - 1$
7. 3
8. a. 27 b. 125 c. 26 d. 76
9. 4
10. 6 atau $-\frac{6}{19}$
11. 2006
12. $-2 + 2\sqrt{3}$
13. 23
14. –15
15. 763
16. 345
17. 727
18. 1984
19. 6
20. Terbukti

LATIHAN 5A

1. $2x^2 + 9x - 24 = 0$
2. $p \le -2$ atau $p \ge 6$
3. $p \ge 4$
4. $7x^2 + 4x + 1 = 0$
5. $\frac{2}{3}$
6. 828
7. 13
8. 337
9.
10. $\frac{11}{5}$
11. 19
12. –2010
13. 2009
14. 64
15. $\frac{1}{2}$
16. 3
17. –2
18. Terbukti
19. Terbukti
20. 383
21. Terbukti
22. Terbukti

LATIHAN 5B
1. $\frac{1}{16}$
2. $\frac{1}{4}$
3. 250
4. 5
5. {5}
6. 27
7. 4

LATIHAN 5C
1. 12
2. 2
3. 512
4. 1
5. $0 < p < 12$
6. $4\sqrt{3}$
7. 1/5
8. 60
9. 27
10. 55
11. 1
12. $\frac{1}{3}$
13. 12

LATIHAN 5D
1. $(x-4)^2+(y-3)^2=16$
2. $(x-5)^2+(y-6)^2=6^2$
3. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ or $(x+3)^2+(y+4)^2=25$
4. $(1 + 2\sqrt{3}, 0)$ & $(1-2\sqrt{3}, 0)$
5. $7x - y = 50$
6. 0 or 50
7. $2\sqrt{3}$ atau $6\sqrt{3}$
8. $13x - 9y = 100$ or $3x + y = 20$
9. $3y = 4x + 30$
10. 23
11. 1
12. 140
13. 23

LATIHAN 5E
1. tidak ada
2. 15
3. 37
4. 3 or -3
5. $\frac{18}{5}$
6. 12
7. -4, 0 or 4
8. 10
9. 5101
10. 20
11. 429

LATIHAN 6
1. 3
2. 9 dan 223
3. $(-3,-3)$, $(0,3)$ dan $(3, 0)$
4. $k > \sqrt{2}$ or $k < -\sqrt{2}$
5. 2
6. Terbukti
7. 334
8. $(-5,9)$, $(-2,6)$, $(-2,-6)$, $(0,4)$, $(19, 99)$
9. $(1,1,1)$, $(-2,-2,-2)$
10. 158
11. $(54, 24, 6)$
12. $\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21}, \frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$ $\left(\frac{11-4\sqrt{7}}{21}, \frac{22-8\sqrt{7}}{7}\right)$

LATIHAN 7
1. 2
2. $-4 < x < 2$
3. 112
4. Terbukti
5. 0
6. x=y=u=v=1/4 da dan z = 3
7. (1, 1)

8-10. Terbukti

11. $2\sqrt{2}$
12. 2 jika x = 1/2

13-17. Terbukti

18. 0

19-20. Terbukti

21. 16/5
22. 0
23. 7/2

24-27. Terbukti

LATIHAN 8
1. 11
2. x = -2 or 9
3. 7
4. 2 : 1
5. 81
6. 50
7. 125
8. 5993
9. 45/8
10. 69

BAB II TEORI BILANGAN

LATIHAN 1
1. 30
2. 2001
3. 4022
4. 2
5. 83
6. Terbukti
7. Terbukti
8. Terbukti

LATIHAN 2
1. 29
2. 9
3. 2.006.005
4. 890
5. 20
6. 8
7. 588
8. 675
9. 97
10. 925
11. 30
12. Terbukti
13. Terbukti
14. 4
15. 870
16. Terbukti
17. 630
18. Terbukti
19. 41
20. Terbukti
21. Terbukti

LATIHAN 3
1. 32.571
2. 33
3. a = 5 dan b = 9
4. 592
5. 76776
6. 0, 4 dan 5

LATIHAN 4
1. 2259
2. 2521
3. 3731
4. 1, 3, 16, 33 dan 67
5. 3
6. 2
7. 25
8. 4
9. 65
10. (2, 7), (3, 4), (4, 3), (6, 9), (7, 2), (9, 6)
11. Terbukti
12. Terbukti
13. 401

LATIHAN 5
1. 16
2. 2006
3. 60
4. 140
5. 37
6. 2
7. 432
8. 35
9.
10. 103
11. 224
12. 589
13. 180
14. ganjil = 12
genap = 36

LATIHAN 6
1. 6
2. 5
3. 13
4. 4
5. 7
6. 100
7. 3
8. $8^{8^{8^{8}}}$
9. n $\in$ Bilangan asli
10. 144
11. 5
12. 16
13. 561
14. 96
15 63
16. 375
17 9
18. 0 atau 1
19. 192

LATIHAN 7
1. 52
2. 108
3. 10
4. 200
5. 78
6. 5
7. 358
8. 84
9. 145
10. (14, 112)
11. 156
12. 750
13 a = 3 ; b = 2
14. 400
15. 648
16. 10000, 11000, 12000, ···, 9900
17. a. Belum ; b. Pasti
18. Terbukti
19. 173
20. 73
21. 1
22. 29
23. 123
24. 1
25. 0
26. 3
27. Tidak ada
28. 61
29. 2
30. 1999
31. 5, 13, 17, 97
32. 8
33. 41

LATIHAN 8
1. 105
2. 81649
3. 4abc899
4. Terbukti
5. Tidak ada
6. 6
7. 124
8. Terbukti
9. 390625 dan 141376
10. Terbukti
11. 7
12. 38
13. Terbukti
14. x = 59 dan n = 12
15. (4, 2)

LATIHAN 9
1. 2288
2. 44
3. 15
4. 24
5. 6
6. 312
7. 27
8. $1 < x \le \frac{4}{3}$
9. 997
10. $2 - \sqrt{3}$
11. 743
12. 2013021
13. $\frac{7}{15}$ dan $\frac{4}{15}$
14. 49
15. –1
16. 1006

BAB III GEOMETRI

LATIHAN 1

1. $\frac{\sqrt{34}}{6}$
2. Terbukti
3. -2
4. Terbukti
5. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
6. Terbukti
7. Terbukti
8. Terbukti
9. Terbukti
10. 1/2
11. 150
12. $\frac{13}{4} - \sqrt{10}$
13. 1
14. $\frac{7}{16}$
15. $22,5^o$
16. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
17. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
18. $-\frac{1}{8}$
19. 159
20. 6
21. 9/4
22. $-\frac{2009}{2}$
23. $\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}$

LATIHAN 2

1. $y = -2x + 13$
2. $y = 6x - 12$
3. $y = x - 2$
4. 4
5. 3
6. 49
7. $4y = 5x - 15$
8. $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$
9. $4\sqrt{2}$

LATIHAN 3A

1. 36^o
2. 20
3. $\sqrt{3}$
4. 60^o
5. $\frac{3}{5}$
6. Terbukti
7. $\sqrt{26}$
8. 130
9. (4,5,6)
10. Terbukti

LATIHAN 3B

1. $\frac{12}{5}$
2. $\frac{28}{5}$
3. 10
4. $\frac{12}{5}$
5. 2
6. 5
7. Terbukti

LATIHAN 3C

1. $\frac{11}{3}$
2. 19 : 8
3. $\frac{9}{5}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
5. $\frac{4}{3}$
6. 4 : 9
7. 100^0
8. $2\sqrt{10}$
9. 161/3
10. 3/2
11. Terbukti
12. Terbukti

LATIHAN 3D

1. $3 + \sqrt{3}$
2. 36
3. $\frac{7}{24}$
4. 7
5. 110
6. Terbukti
7. 4
8. 3
9. 1/12
10. $\frac{x+y}{2x}$
11. Terbukti
12. 3
13. 8/105
14. 7
15. 18
16. 441
17. 1 : 3
18. $2\sqrt{3} - 3$
19. 27
20. PD=PE=PF=1
21. 168/295
22. Terbukti
23. Terbukti
24. 21

LATIHAN 3E

1. $\frac{35}{6}$
2. 1 : 2
3. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

LATIHAN 3F

1. 12
2. 14
3. 2/3
4. Terbukti
5. Terbukti
6. Terbukti

LATIHAN 4

1. 9 : 4
2. 10
3. $\frac{4x}{9}$
4. 1 : 2
5. 2007
6. 106
7. $14\sqrt{3}$
8. 13.924
9. 15
10. 50/3
11. Terbukti

LATIHAN 5

1. $\sqrt{3} : 2$
2. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
3. 3 : 2
4. -4

LATIHAN 6

1. 153^o
2. $2\pi + 4$
3. 18^o
4. 230
5. 70^o
6. 3
7. 8
8. 2π
9. 63/11
10. 10^o
11. 3
12. Terbukti
13. Terbukti
14. Terbukti
15. Terbukti

LATIHAN 7

1. Terbukti
2. $\frac{25}{24}$
3. $\frac{1}{9}k^2$
4. $x = 3$
5. Terbukti
6. Terbukti
7. Terbukti
8. Terbukti
9. Terbukti
10. 130
11. Terbukti

BAB IV KOMBINATORIK

LATIHAN 1.A
1. a. 240 ; b. 480
2. 5040
3. 12
4. 240
5. 120
6. 8400
7. 720
8. 90
9. 48
10. 94
11. 499
12. 72
13. a. 98 ; b. 60
14. a. 2559
    b. 1050
15. 972
16. 70
17. 108
18. 4500
19. 112896
20. 32

LATIHAN 1.B
1. 1
2. 8
3. a. 720
   b. 60
   c. 360
   d. 360
   e. 90720
   f. 181440
   g. 151200
4. 360
5. 52
6. 50
7. 48
8. 72
9. 1152
10. 267

LATIHAN 1.C
1. 120
2. 15
3. 1575
4. 56
5. 20
6. 64
7. 120
8. 231
9. 81
10. 771
11. 26
12. 277.200
13. 8
14. 2^{1010}
15. a. 196 ; b. 252
16. 380 pert ; 140 seri
17. 36
18. 134.789
19. 502
20. 462
21. 1820
22. 10920
23. 53130
24. 432
25. 315
26. 140
27. 44
28. 1
29. 1130
30. 186
31. 10
32. 945
33. a. 210 ; b.90 ; c.45
34. 34
35. 380.570.190
36. 50
37. 630
38. 89
39. Terbukti

LATIHAN 1.D
1. 8100
2. 15
3. 480
4. 3720
5. 162
6. 758

LATIHAN 1E
1. 5050
2. 45
3. 560
4. 28
5. 21
6. 10
7. 70

LATIHAN 1F
1. Terbukti
2. $729x^6 - 1458x^5y + 1215x^4y^2 - 540x^3y^3 + 135x^2y^4 - 18xy^5 + y^6$
3. 1088640
4. –1792
5. –108
6. 20160
7. 5 : 3
8. 129
9. a. 5 ; b. 8
10. a. 64 ; b. 1
11. 2^n
12. $2^{2008} - 1$
13. 10^n
14. a. 56
    b. 70
    c. 56
15. 8085
16. 35
17. 816
18. 500

LATIHAN 2D
1. 10/36
2. 14/36
3. a. 1/21 ; b. 5/42
   c. 5/14 ; d. 10/21
4. 11/21
5. 21/25
6. 1/2006
7. 1
8. 8/9
9. 1/2007
10. 1/32
11. 1/3
12. 21
13. 16/81
14. a. 6/11 ; b. 5/88
    c. 35/88
15. 10/21
16. 2/3
17. 4/7
18. 1/2
19. 3/10
20. 1/2
21. 1/36
22. 10
23. 7/9
24. 3/5
25. 1,3,4,5,6,8
26. 13/36
27. 4/10
28. 1/2
29. 36/96
30. 2/5
31. 9/625
32. 121/202
33. 5/16
34. $\sqrt{3} - 1$
35. 15/64
36. 7/99
37. 67/462

LATIHAN 2E
1. a. 18/169
   b. 3/26
2. a. 3/40
   b. 1/12
3. a. 1/3
   b. 4/15
   c. 4/15
   d. 2/15
4. 1/52
5. 25/169

LATIHAN 2F
1. 775
2. 181/182
3. 392/429
4. 124/143
5. 5/11
6. 25/169
7. 27/35

LATIHAN 3A
1. 11
2. 20
3. 15
4. 429
5. 286
6. 1060
7. 23

LATIHAN 3B
1. 0,55
2. 0,225
3. 2/5
4. 1/4
5. 8/9
6. 14/36
7. 7/13
8. a. 0,97 ; b. 0,68
   c. 0,17 ; d. 0,12
   e. 1

LATIHAN 4
1. 5
2. 1004
3. 415
4. 756
5. Terbukti
6. Terbukti
7. Terbukti
8. Terbukti
9. Terbukti
10. Terbukti
11. Terbukti
12. Terbukti
13. Terbukti
14. Terbukti
15. Terbukti
16. Terbukti

DAFTAR PUSTAKA

1. Anderson, Ian. 2002. *A First Course in Discrete Mathematics*. Springer-Verlag, London.
2. Budhi, Wono Setya. 2006. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika.* Ricardo, Jakarta.
3. Clark, W. Edwin. 2003. *Elementary Number Theory*. Department of Mathematics University of South Florida.
4. Engel, Arthur. 1998. *Problem-Solving Strategies*. Springer-Verlag, New York.
5. Haese, R. C. dan Haese, S. H. 1981. *Competition Mathematics*. Haese Publications.
6. Manfrino RB, dkk. 2005. *Inequalities*. Instituto de Matematicas Universidad Nacional Mexico.
7. Posamentier, Alfred S dan Salkind, Charles. 1988. *Challenging Problems in Geometry*. Dover Publications Inc, Newyork.
8. Susanto H., Sisworo, dan As'ari, AR. 2006. *Napak Tilas Olimpiade Sains Nasional : Matematika SMP.* Universitas Negeri Malang Press.
9. Susianto, Bambang. 2006, *Olimpiade Matematika dengan Proses Berpikir : Aljabar dan Bilangan*. Grasindo, Jakarta.
10. Wirodikromo, Sartono. 1995. *Matematika untuk SMU Kelas 1 Catur Wulan 3*. Erlangga, Jakarta.
11. Wirodikromo, Sartono. 2000. *Matematika untuk SMU Kelas 3 Catur Wulan 1*. Erlangga, Jakarta.
12. Zeith, Paul. 2007. *The Art and Craft of Problem Solving*. Jon Wiley and Son.

RIWAYAT HIDUP PENULIS

Eddy Hermanto lahir di Desa Bunut Tinggi, Kecamatan Talo, Kabupaten Bengkulu Selatan (sekarang Kabupaten Seluma) pada tanggal 9 September 1979. Pendidikan SD dan SLTP diselesaikannya di Lampung, yaitu SD di SD Negeri 2 Bandar Jaya, Lampung Tengah dan SLTP di SMP Negeri Bandar Jaya, Lampung Tengah. Sedangkan pendidikan SLTA dilaluinya di SMU Negeri 5 Bengkulu. Penulis yang juga merupakan putera asli Bengkulu ini kemudian melanjutkan pendidikan S1 ke Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta pada tahun 1997 yang diselesaikannya pada bulan Februari 2002 dengan predikat *Cum Laude*.

Saat ini Penulis bekerja sebagai PNS di Pemerintah Kota Bengkulu pada Bagian Administrasi Pembangunan Setda Kota Bengkulu (dulu bernama Bagian Penyusunan Program Setda Kota Bengkulu) yang telah digeluti sejak Desember 2002. Selain bekerja di Pemerintah Kota Bengkulu, Penulis juga aktif membina siswa-siswa di SMA N 5 Bengkulu baik dalam persiapan menghadapi Ujian Masuk Universitas Gadjah Mada (UM-UGM), Seleksi Penerimaan Mahasiswa baru (SPMB) maupun ketika SMA N 5 Bengkulu akan menghadapi perlombaan-perlombaan baik tingkat kota, provinsi maupun nasional. Penulis juga pernah beberapa kali membina siswa-siswa dari Provinsi Bengkulu yang akan mengikuti Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika.